

# ОБ ОЦЕНКЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ СБОРЕ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА

Ю.И. Бердышев

Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии Наук, Екатеринбург, Россия

Управляемый космический аппарат (КА) и космический мусор (КМ) отождествляются с материальными точками, движущимися в ньютоновском поле [1]. При маневре КА использует импульсное, либо непрерывное управление. Энергетические ресурсы КА ограничены. При импульсном управлении ограничен расход характеристической скорости (заданным числом  $c_1$ ), при непрерывном управлении — интеграл энергии. Используется управление, не выводящее КА из плоскости исходной орбиты (ИО). Это связано с тем, что поворот плоскости движения требует больших энергозатрат. Предполагается, что КМ представляет собой заданную группу материальных точек  $H = \{M_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ , движущихся по кеплеровским орбитам. Каждая точка  $M_i$  из этой группы “прошивает” с периодом  $T_i$  плоскость ИО в двух точках  $W_{i1}, W_{i2}$ . Под обслуживанием точки  $M_i$  понимаем совмещение геометрических координат одной из точек  $W_{i1}, W_{i2}$  в соответствующий момент прошивания.

Задача состоит в определении максимального числа  $n$  ( $n \leq m$ ) точек из группы  $H$ , которые можно обслужить при заданных энергоресурсах и очередности  $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  их обслуживания.

При решении этой задачи используются методы построения областей достижимости КА и их свойства. Здесь  $D_\vartheta$  — множество всех точек, в которые МТ сможет попасть в произвольный момент времени из фиксированного положения  $\vartheta$ , если в этом положении будет приложен один импульс, ограниченный по величине заданным числом  $c_1$  [2,3]. В частном случае это множество является эллипсом безопасности [1, 4]. Полярные координаты  $\vartheta_1, r_1$  точки  $M_1$ , лежащей на границе области  $D_\vartheta$  и отвечающей параметру  $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 2\pi$ , определяются формулами

$$\vartheta_1 = \vartheta + 2 \arctang \left( \frac{A}{B} \right), \quad r_1 = r \frac{F_1}{F_3}, \quad (1)$$

где

$$A = cF_1^2 (c + \cos \lambda), \quad B = 2\mu W_n (V_n \sin \lambda + V_2 \cos \lambda)c,$$

$$F_1 = W_n^2, \quad F_2 = W_n W_r, \quad F_3 = F_1 \cos \psi - F_2 \sin \psi + c_0,$$

$$c_0 = \mu \frac{1 - \cos \psi}{r}, \quad \psi = \vartheta_1 - \vartheta, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta},$$

$$c = \frac{c_1}{V}, \quad V = \sqrt{V_n^2 + V_2^2},$$

$p, e$  — параметры ИО;  $V_n, V_r$  — тангенциальная и радиальная составляющие вектора скорости  $V$  МТ в точке  $\vartheta$  на ИО до приложения импульса;  $\lambda$  — угол между направлением импульса и вектором скорости  $V$ ;  $W_n, W_r$  — тангенциальная и радиальная составляющая вектора скорости в точке  $\vartheta$  после приложения импульса величины  $c_1$ . При изменении  $\lambda$  от 0 до  $2\pi$  точек  $(\vartheta_1, r_1)$  описывает границу области  $D_\vartheta$ .

**Утверждение 1**

Пусть ИО является круговой,  $c = \frac{c_1}{V}$ . Тогда, в зависимости от величины  $c$ , область безопасности  $D_\vartheta$  может иметь один из следующих трех видов: при

$$c < \sqrt{2} - 1 \quad (2)$$

она ограничена и имеет внутреннюю и внешнюю границу (рис.1), при

$$\sqrt{2} - 1 \leq c < 1, \quad (3)$$

она не ограничена и также имеет внутреннюю и внешнюю границу (рис. 2), при  $c \geq 1$  она неограниченна и односвязна (рис. 3).

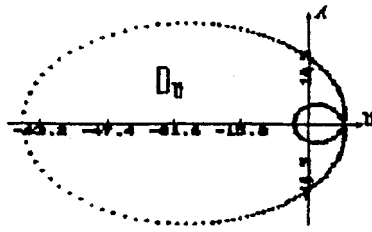


Рис. 1

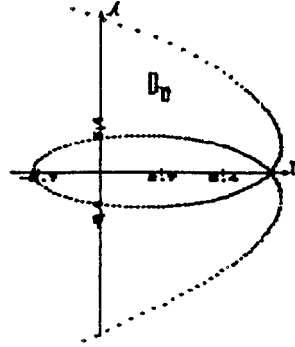


Рис. 2

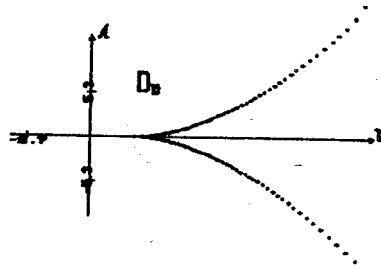


Рис. 3

В случае эллиптической ИО вид области  $D_\vartheta$  такой же, как и при круговой ИО (рис. 1–3), но сама область деформируется (подробнее см. в [3]).

Определяется также граница области достижимости  $G$ , являющейся объединением множеств  $D_\vartheta$ , когда точка  $\vartheta$  приложения импульса пробегает всю исходную орбиту (ИО). В случае круговой ИО область  $G$  при условии (2) является кольцом, при условии (3) — плоскость ИО без некоторого круга, при условии  $c \geq 1$  — всей плоскости ИО.

При каждом параметре  $\vartheta$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ :

1. определяем углы  $\lambda_+$  ( $0 \leq \lambda_+ \leq \pi$ ),  $\lambda_-$  ( $0 \leq \lambda_- \leq 2\pi$ ) из некоторого трансцендентного уравнения  $F_\vartheta(\lambda) = 0$  (это уравнение имеет сложный вид и здесь не приводится);
2. при  $\lambda = \lambda_+$  и  $\lambda = \lambda_-$  вычисляем  $(\vartheta_1, r_1)$  по формулам (1). Тогда граница  $G^0$  будет объединением точек  $(\vartheta_1, r_1)$  при всех  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ . При этом углом  $\lambda_+$  соответствует внешняя часть  $G^{0+}$  границы  $G^0$ , а углом  $\lambda_-$  — внутренняя часть  $G^{0-}$  границы  $G^0$ . Установлено, что  $G^{0+}$  лежит между кривыми  $G_*^{0+}$  и  $Q^+$  (рис. 4), имеющими аналитическое описание, при этом  $Q^+$  является эллипсом, а  $G_*^{0+}$  определяется формулами (1) при  $\lambda = 0$ . Достоинство одноимпульсного управления состоит в простой его реализации, возможности аналитически определять параметры порожденного им движения, границы области достижимости. Это позволяет практически мгновенно в

каждый момент времени определять возможности КА по достижению той или иной цели. Поэтому выявляются те случаи, в которых область достижимости  $G$  не расширится при использовании многоимпульсного управления с тем же запасом характеристической скорости, либо непрерывного управления с интегральным ограничением. Показано, что указанные случаи имеют место и при круговой исходной орбите и некоторых параметрах эллиптической орбиты.

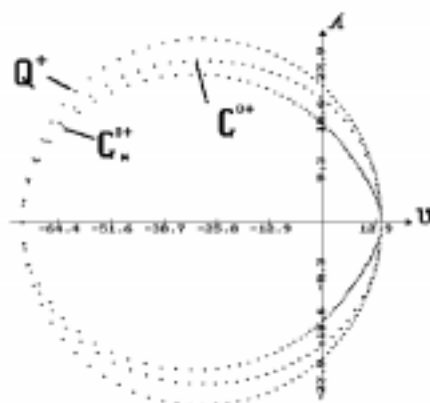


Рис. 4

В частности, с использованием двойственных методов оптимизации [5, 6], линеаризации уравнений движения вдоль круговой исходной орбиты удалось показать, что область достижимости не расширится, если использовать любое число импульсов, сумма величин которых не превосходит  $c_1$ .

*Схема доказательства* Рассмотрим две вспомогательные задачи.

Задача 1:  $\rho(U) \rightarrow \min, U \in U_1$ ,

Задача 2:  $\rho(U) \rightarrow \min, U \in U_2$ ,

где  $\rho(U)$  — некоторая функция;  $U_1$  — множество одноимпульсных управлений и  $U_2$  — множество непрерывных функций (ресурсы которых ограничены числом  $c_1$ ). Функция  $W(t, l)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $-1 \leq l \leq 1$ , определена в [6].

**Утверждение 2**

Оптимальные значения  $\gamma^0$  и  $\omega^0$  задач 1 и 2 определяются формулами

$$\gamma^0 = \max_l \min_t W(t, l); \quad \omega^0 = \min_t \max_l W(t, l). \tag{4}$$

Доказывается равенство  $\gamma^0 = \omega^0$ , из которого следует эквивалентность областей при  $U \in U_1$  и при  $U \in U_2$ .

Рассматривается система векторных уравнений

$$\dot{r} = V, \quad \dot{V} = g + \frac{U}{m}, \quad \dot{m} = -\frac{|U|}{c_0}, \tag{5}$$

$$|U(t)| \leq P_0, \tag{6}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} |U(t)| dt \leq c_*, \tag{7}$$

где  $P_0 > 0$ ,  $c_* > 0$ .

Пусть  $U_3$  — множество кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию (6). Пусть  $U_0$  — управление, переводящее МТ с ИО на границу  $G^0$  области достижимости и миними-

зирует расход массы. В случае круговой ИО и больших значений  $P_0$  в (6) управление  $U^0$  удовлетворяет условию

$$|U(t)| = \begin{cases} P_0, & t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon, \\ 0, & t_0 + \varepsilon \leq t < t_1. \end{cases} \quad (8)$$

Это управление эквивалентно одноимпульсному управлению, при  $P_0 \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для различных значений  $c_1$  определены области тех параметров  $p, e, \text{ИО}$ , при которых оптимальное управление в задаче о выводе МТ на границу области достижимости является одноимпульсным (рис. 5).

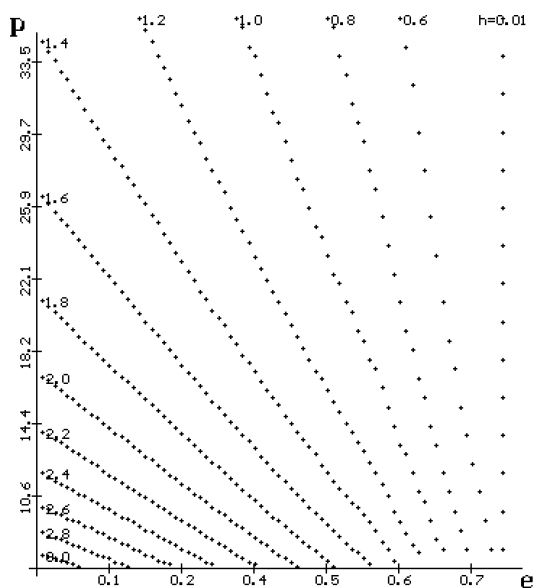


Рис. 5

Области достижимости положены в основу предлагаемого быстродействующего алгоритма решения задачи о сборе космического мусора.

### Метод решения задачи

Фиксируем точку  $\vartheta$  приложения импульса и для каждой точки прошивания  $(\vartheta_i, r_i)$  по весьма простой формуле [3]

$$\Delta_i = \left( \sqrt{\frac{Q}{D}} - 1 \right) V, \quad (8)$$

$$Q = 1 - \cos(\vartheta_i - \vartheta), \quad D = \frac{p}{r_i} - e \cos \vartheta_i - \cos(\vartheta_i - \vartheta),$$

определяем величину импульса, необходимую для обслуживания этой точки в какой-нибудь момент времени. Упорядочим точки  $\{M_1, \dots, M_m\} \rightarrow \{M_{j_1}, \dots, M_{j_m}\}$  так, чтобы

$$\Delta_{j_1} < \Delta_{j_2} < \dots < \Delta_{j_m}. \quad (9)$$

Пусть  $n(\vartheta)$  — число, зависящее от точки  $\vartheta$ , при котором

$$\Delta_{j_n} \leq c_1, \quad \Delta_{j_{n+1}} > c_1,$$

$$n_0 = \max(n(\vartheta) \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Тогда число  $n_0$  и очередность  $\{j_1, \dots, j_{n_0}\}$ , определяемые соотношениями (9), будут решением задачи. Совпадение моментов прошивания и обслуживания обеспечивается за счет фазирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 94-01-00350.

### **Литература**

1. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
2. Бердышев Ю.И. О задачах одноимпульсного перехода и построении области безопасности в ньютоновском поле // Количественные исследования, 1993, т. 31, № 6, с. 3–10.
3. Бердышев Ю.И. К вопросу о построении областей достижимости в ньютоновском поле // Механика твердого тела, 1993, № 5, с. 3–7.
4. Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1996, 448 с..
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
6. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. К вопросу о редукции некоторых линейных задач оптимального управления с интегральными ограничениями // Кибернетика, 1990, № 4, р. 59–64.