МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ АЛЬМАНСИ

В. В. Карачик*
e-mail: karachik@susu.ru

Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, г. Челябинск, 454080, Россия

Статья поступила 11 декабря 2009 г.

Введение

Хорошо известно классическое представление Альманси полигармонических функций, которое успешно применяется для построения решений модельных задач для бигармонического и полигармонического уравнений. На основании результатов по построению нормированных систем функций для оператора Лапласа [1-4] в работах автора [5-8] конечное представление Альманси распространено на аналитические функции действительных переменных. Имеются также многочисленные работы, посвященные обобщению представления Альманси на дифференциальные операторы отличные от оператора Лапласа [9-10] и [11].

В настоящей работе, представления Альманси применяются для построения решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном шаре. В [12] уже была сделана попытка построения полиномиальных решений уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$ и полигармонического уравнения $\Delta^m u(x) = Q(x)$, где $Q(x)$ — произвольный полином. Найденные решения отличаются от решений полученных в [13]. Хорошо известна функция Грина $G(x,\xi)$ задачи Дирихле в шаре [14], а поэтому с теоретической точки зрения построение решения такой задачи не представляет интереса. Однако, при полиномиальной правой части $Q(x)$ и полиномиальном граничном значении $u_{|x|=1} = P(x)$ решение $u(x)$ задачи Дирихле оказывается полиномиальным, для нахождения которого необходимо вычислять сингулярный интеграл

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{|x|<1} G(x,\xi)Q(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad (1)$$

где ω_n — площадь единичной сферы, $G(x,\xi) = E(x,\xi) - E(|x|\xi, x/|x|)$, а $E(x,\xi) = (n-2)^{-1}|\xi - x|^{2-n}$ $(n > 2)$ [14]. В настоящей работе будут даны формулы, позволяющие легко вычислять полиномиальное решение $u(x)$, задаваемое формулой (1).

1. Полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Сначала рассмотрим однородную краевую задачу для уравнение Пуассона в единичном шаре $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$

$$\Delta u(x) = Q(x), x \in \Omega, \quad u_{|x|=1} = 0, \qquad (2)$$

---

* Карачик Валерий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, тел.: (8-351) 267-99-71.

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n>2$. Предположим сначала, что $Q(x)=Q_m(x)$ — однородный полином степени m.

В [5] доказано, что если функция $Q(x)$ — произвольный полином, тогда имеет место представление

$$Q(x)=v_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{n/2-1}}{(k-1)!}v_k(\alpha x)\,\mathrm{d}\alpha, \tag{3}$$

где гармонические полиномы $v_k(x), k=0,1,\ldots$ определяются из равенств

$$v_k(x)=\Delta_\lambda^k Q(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k+s}Q(\alpha x)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{4}$$

Из этого представления в работе [12] установлено, что некоторое полиномиальное решение $v(x)$ уравнения Пуассона $\Delta v(x)=Q_m(x)$ может быть записано в виде

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{|x|^{2s+2}\,\Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+1}(2m-2s+n,2)_{s+1}}. \tag{5}$$

Легко проверить, что верно равенство $\Delta(|x|^{2s+2}R_m(x))=4(s+1)(m+s+n/2)|x|^{2s}R_m(x)$, где $R_m(x)$ — однородный гармонический полином степени m. Более того, из свойств представления (3) следует, что если $Q_m(x)=|x|^{2s}R_m(x)$, то формула (5) дает именно это решение, т. е.

$$v(x)=\frac{|x|^{2s+2}R_m(x)}{(2s+2)(2m+2s+n)}.$$

Поэтому, если разложить полином $Q_m(x)$ с помощью формулы Альманси на слагаемые вида $|x|^{2s}R_{m-2s}(x)$, то решение уравнения $\Delta v(x)=Q_m(x)$, задаваемое формулой (5) имеет вид

$$v(x)=\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{|x|^{2s+2}R_{m-2s}(x)}{(2s+2)(2m-2s+n)}, \tag{6}$$

где $[a]$ — целая часть числа a, а однородные гармонические полиномы $R_m(x)$ определяются формулой Альманси $Q_m(x)=R_m(x)+|x|^2R_{m-2}(x)++|x|^{2s}R_{m-2s}(x)+$. Подставим в полученную формулу (6) вместо сомножителей $|x|^{2s+2}$ единицу. Тогда, многочлен

$$u_0(x)=\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{R_{m-2s}(x)}{(2s+2)(2m-2s+n)} \tag{7}$$

является гармоническим, поскольку таковы $R_{m-2s}(x)$, и обладает свойством $u_0(x)=v(x)$ при $|x|=1$. Поэтому, многочлен $u(x)=v(x)-u_0(x)$ является решением задачи Дирихле (2).

Преобразуем это решение. Последовательно выбирая число слагаемых в равенстве (7) равное двум, трем устанавливаем следующую формулу

$$u'_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+1}}\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}}, \tag{8}$$

где $(m)_s=m(m+1)(m+s-1)$ — символ Похгаммера. Докажем, что $u'_0(x)=u_0(x)$.

Лемма 1. Полином $u'_0(x)$ из (8) является гармоническим.

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\Delta(|x|^{2s} R_m(x)) = 2s(2m+2s+n-2)|x|^{2s-2} R_m(x) + |x|^{2s} \Delta R_m(x),$$

в котором $R_m(x)$ — однородный полином степени m. Согласно этому равенству

$$\Delta u'_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2k(2k+2m-4s+n-2)(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k-2}\Delta^s Q_m}{(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}\Delta^{s+1} Q_m}{(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}}.$$

Суммирование во втором слагаемом осуществим следующим образом $\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s} = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s}$ (надо положить $k \to k+1$ и $s \to s+1$) и тогда будем иметь

$$\Delta u'_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s} (-1)^{k+1} \frac{(2k+2m-4s+n-4)(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}\Delta^{s+1} Q_m}{2\cdot 4^{s+1} k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-2)_{s+3}} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}\Delta^{s+1} Q_m}{4^{s+1} k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{(m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}\Delta^{s+1} Q_m}{4^{s+1} k!(s-k+1)!} \times$$

$$\times\left(-\frac{m+n/2-2s+k-2}{(m+n/2-2s+k-2)_{s+3}} + \frac{1}{(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}}\right).$$

Поскольку $(m+n/2-2s+k-2)_{s+3} = (m+n/2-2s+k-2)(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}$, то выражение в скобках равняется нулю и значит полином $u'_0(x)$ гармонический. □

Из леммы 1 следует, что полином $v(x) - u'_0(x)$ является решением уравнения Пуассона (2).

Лемма 2. Гармонические полиномы $u_0(x)$ и $u'_0(x)$ равны.

Доказательство. Убедимся, что полином $v(x) - u'_0(x)$ является решением задачи Дирихле (2). Действительно, имеют место равенства

$$u'_0(x) - v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m}{4^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k (m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} -$$

$$-\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2}\Delta^s Q_m}{(2,2)_{s+1}(2m-2s+n,2)_{s+1}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m}{4^{s+1}} \sum_{k=0}^{s+1} \frac{(-1)^k (m+n/2-2s+2k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m}{4^{s+1}(s+1)!} \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} |x|^{2k} \frac{(m+n/2-2s+2k-1)\Gamma(m+n/2-2s+k-1)}{\Gamma(m+n/2-s+k+1)}.$$

Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя связь гамма и бета функций Эйлера можем записать

$$\frac{\Gamma(m+n/2-2s+k-1)}{\Gamma(m+n/2-s+k+1)}=\frac{B(s+2,m+n/2-2s+k-1)}{\Gamma(s+2)}=$$
$$=\frac{1}{(s+1)!}\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2+k-2s-2}\,\mathrm{d}t.$$

Значит, внутренняя сумма с учетом того, что $kt^k=t(t^k)'$ и бинома Ньютона имеет вид

$$\left(m+n/2-2s-1\right)\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-2}\sum_{k=0}^{s+1}(-1)^k\binom{s+1}{k}|x|^{2k}\,t^k\,\mathrm{d}t+$$
$$+2\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-2}\sum_{k=0}^{s+1}(-1)^k\binom{s+1}{k}k\,|x|^{2k}\,t^k\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1(1-t)^{s+1}\left(t^{m+n/2-2s-1}\right)'(1-t\,|x|^2)^{s+1}\,\mathrm{d}t+2\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-1}\left((1-t\,|x|^2)^{s+1}\right)'\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1(1-t)^{s+1}\,\mathrm{d}\left(t^{m+n/2-2s-1}\right)\left(1-t\,|x|^2)^{s+1}\right)-(s+1)\,|x|^2\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-1}\left(1-t\,|x|^2\right)^s\mathrm{d}t.$$

Поэтому, учитывая, что при $n>2,\ s\ge 0,\ m-2s\ge 0,\ t^{s+1}(1-t)^{m+n/2-2s-1}\,|_0^1=0$ и беря первый интеграл по частям получим

$$(s+1)\int_0^1(1-t)^s t^{m+n/2-2s-1}(1-t\,|x|^2)^s((1-t\,|x|^2)-|x|^2\,(1-t))\mathrm{d}t=$$
$$=(s+1)(1-|x|^2)\int_0^1(1-t)^s t^{m+n/2-2s-1}(1-t\,|x|^2)^s\,\mathrm{d}t.$$

Следовательно,

$$u'_0(x)-v(x)=\left(1-|x|^2\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)\Delta^sQ_m(x)}{4^{s+1}\left((s+1)!\right)^2}\int_0^1(1-t)^s t^{m+n/2-2s-1}\left(1-t\,|x|^2\right)^s\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1-|x|^2}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^sQ_m(x)}{(2s+2)!!(2s)!!}\int_0^1(1-t)^s t^{m-2s+n/2-1}\left(1-t\,|x|^2\right)^s\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Теперь, легко видеть, что полином $v(x)-u'_0(x)$, удовлетворяющий уравнению Пуассона удовлетворяет и однородному условию Дирихле $(u'_0(x)-v(x))_{||x|=1}=0$, а значит гармонические полиномы $u'_0(x)$ и $u_0(x)$ принимают одно и тоже значение на единичной сфере и поэтому равны. □

Итак, исходя из формулы (9) решение задачи (2) имеет вид

$$u(x)=\frac{|x|^2-1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^sQ_m(x)\int_0^1\frac{(1-t\,|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!(2s)!}t^{m-2s+n/2-1}\,\mathrm{d}t\,, \tag{10}$$

или тоже решение, но в другой форме

$$u(x)=v(x)-u'_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\Delta^sQ_m(x)\sum_{k=0}^{s+1}\frac{(-1)^{k+1}(m+n/2-2s+2k-1)\,|x|^{2k}}{4^{s+1}k!(s-k+1)!(m+n/2-2s+k-1)_{s+2}}.$$

Еще немного преобразуем полученное решение задачи Дирихле.

Теорема 3. Решение задачи (2) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-t\,|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^sQ(tx)t^{n/2-1}\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — произвольный полином. Представим его в виде $Q(x)=\sum_m Q_m(x)$. Обозначим через $u_m(x)$ полиномиальное решение однородной задачи Дирихле (2) с правой частью $Q(x)=Q_m(x)$. Тогда, $u(x)=\sum_m u_m(x)$. Из формулы (10) следует

$$u(x)=\sum_m u_m(x)=\sum_m \frac{|x|^2-1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}t^{n/2-1}\Delta^s Q_m(tx)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^s Q(tx)t^{n/2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Что и утверждалось. □

П р и м е р 1. Пусть в задаче (2) $Q(x)=x_i$, а значит $m=1$. Тогда, в сумме из формулы (10) или (11) будет только один член $s=0$. Имеем

$$u(x)=\frac{|x|^2-1}{2}x_i\int_0^1\frac{t^{n/2}}{2}\mathrm{d}t=x_i\frac{|x|^2-1}{2(n+2)},$$

что несомненно верно $\Delta u(x)=x_i$ и $u_{|x|=1}=0$.

Замечание 1. Формула (11) является аналогом формулы (1), записанной в случае полиномиальных функций $Q(x)$.

2. Полиномиальное решение неоднородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

$$\Delta v(x)=0, x\in\Omega,\quad v_{|x|=1}=P(x), \tag{12}$$

с полиномиальным граничным значением $P(x)$ и при $n>2$.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение, дополняющее доказанную выше теорему 3.

Теорема 4. Решение задачи (12) можно записать в виде

$$v(x)=P(x)-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^s}{(2s+2)!!(2s)!!}\Delta^{s+1}P(tx)t^{n/2-1}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

П р и м е р 2. Пусть в задаче (12) $P(x)=x_i^2$. Тогда, в сумме из формулы (13) тоже будет только один член $s=0$. Имеем

$$v(x)=x_i^2-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\frac{2t^{n/2-1}}{2}\mathrm{d}t=x_i^2-\frac{|x|^2-1}{n},$$

что несомненно верно $\Delta v(x)=2-2n/n=0$ и $(v(x)-x_i^2)_{|x|=1}=0$.

Заключение

Явный вид коэффициентов в известном разложении Альманси позволил найти общий вид полиномиального решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона и полиномиального решения неоднородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Список литературы

1. Karachik V. V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2003. — 287:2. — P. 577–592.
2. Karachik V. V. On some special polynomials // Proceedings of AMS. — 2004. — Vol. 132. — P. 1049–1058.

3. Karachik V. V. On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proceedings of AMS. — 1998. — Vol. 126 (12). — P. 3513–3519.
4. Karachik V. V. Summation of two operator series containing the Laplace operator // Известия Челябинского научного центра. — 2007. — N 3(37). — С. 8–14.
5. Карачик В. В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими // Математические труды. — 2007. — 10:2. — С. 142–162.
6. Карачик В. В. Об одном разложении типа Альманси // Математические заметки. — 2008. — 83:3. — С. 370–380.
7. Карачик В. В., Антропова Н. А. О разложениях типа Альманси // Известия Челябинского научного центра. — 2007. — № 1(35). — С. 37–42.
8. Карачик В. В. Об одном представлении аналитических функций // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математика, физика, химия». — 2007. — N 3. — С. 15–23.
9. Nicolescu N. Probléme de l’analyticité par rapport á un opérateur linéaire // Studia Math. — 1958. — Vol. 16. — P. 353–363.
10. Ren G. B, Kähler U. Almansi decompositions for polyharmonic, polyheat, and polywave functions // Studia Math. — 2006. — Vol. 172(1). — P. 91–100.
11. Карачик В. В. Разложения типа Альманси для операторов второго порядка // Известия Челябинского научного центра. — 2009. — N 1(43). — С. 16–21.
12. Карачик В. В., Антропова Н.А. Об одном методе решения уравнения Пуассона // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математика, физика, химия». — 2007. — Вып. 9. — № 19(91). — С. 22–29.
13. Бондаренко Б. А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. — Ташкент: Фан, 1984. — С. 174.
14. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — С. 262.