Известия Челябинского Научного Центра, вып.4(2),1999

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.948

О СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ НЕИНЬЕКТИВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.В. Танана

tanana@csu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила в редакцию 10 мая 1999 года

В настоящей работе дано обобщение результатов работы [1] на случай операторных уравнений в гильбертовом пространстве с линейным неограниченным и неиньективным оператором.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – линейный замкнутый оператор, с областью определения $D(A) \subset H$ такой, что $\overline{D(A)} = H$, и областью значений $R(A) \subset H$. Обозначим через H_0 ядро оператора A, а через A^* – оператор, сопряженный ему.

Кроме того, введем в рассмотрение последовательность $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов A_n, отображающих H в H, с сопряженными A_n^*.

1. Основные понятия и определения

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где $u \in D(A)$, $\overline{f} \in H$.

Определение 1. *Элемент $\overline{u}_0 \in H$ будем называть нормальным решением уравнения (1) при $\overline{f} = \overline{f}_0 \in R(A)$, если $A\overline{u}_0 = \overline{f}_0$ и $\|\overline{u}_0\|^2 = \inf\Big\{\|u\|^2 : Au = \overline{f}_0\Big\}$*, см. [2].

Так как H – гильбертово пространство, а A – линейный замкнутый оператор, то для любого $\overline{f}_0 \in R(A)$ существует единственное нормальное решение $\overline{u}_0$ уравнения (1), см. [2], а множество всех нормальных решений совпадает с $\overline{D(A) \cap H_0^{\perp}} = H_0^{\perp}$, где $H_0^{\perp}$ – ортогональное дополнение ядра H_0 оператора A.

Обозначим через $\{B_n\}$ последовательность операторов B_n с областью определения $D(B_n) \subset H$ и областью значений $R(B_n)$.

Определение 2. *Последовательность операторов $\{B_n\}$ называется A-полной на множестве $M \subset D(A)$, если для любого $u \in M$ найдется последовательность $\{u_n\} \subset H$ такая, что для любого n: $u_n \in D(B_n)$, $u_n \to u$,* а при $n \to \infty$, $B_n u_n \to Au$, см. [3], с. 113.

Определение 3. *Пару $A, \{B_n\}$ будем называть слабо замкнутой, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а при $n \to \infty$, $B_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} \overline{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \overline{f}$,* см. [4].

Лемма 1. *Если последовательность операторов $\{A_n^*\}$ является A^*-полной на всюду плотном множестве $G \subset D(A^*)$, то для любой подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ пара $A, \{A_{n_k}\}$ – слабо замкнута.*

Доказательство см. в [5].

2. Метод конечномерной аппроксимации

Метод регуляризации приближенного решения уравнения (1), следуя [6], заключается в сведении уравнения (1) к вариационной задаче

$$\inf\Big\{\|Au-\overline{f}\|^2+\alpha\|u\|^2:\ u\in D(A)\Big\},\quad \alpha>0. \tag{2}$$

Из работы [7] следует существование, единственность и сходимость решений $\overline{u}_\alpha$ задачи (2) к нормальному решению $\overline{u}$ при условии, что $\alpha\to 0$, а $\overline{f}\in R(A)$. Кроме того, из (2) следует, что

$$\|\overline{u}_\alpha\|^2=\inf\Big\{\|u\|^2:\ u\in D(A),\ Au=A\overline{u}_\alpha\Big\}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$\overline{u}_\alpha\in D(A)\cap H_0^\perp \tag{4}$$

и является нормальным решением уравнения (1) при $\overline{f}=A\overline{u}_\alpha$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\overline{R(A)}=H. \tag{5}$$

Лемма 2. *A – линейный ограниченный оператор. Тогда задача (2) эквивалентна уравнению*

$$A^*Au+\alpha u=A^*\overline{f}.$$

Доказательство см. в [8] на с. 134.

Лемма 3. *Пусть $\overline{u}=A^*\overline{g}$, а $\overline{f}=A\overline{u}+\overline{g}$. Тогда $\overline{u}$ является решением вариационной задачи (2) при $\alpha=1$.*

Доказательство. Пусть $h\in D(A)$. Рассмотрим величину

$$\Delta(h)=\|A(\overline{u}+h)-\overline{f}\|^2+\|\overline{u}+h\|^2-\|A\overline{u}-\overline{f}\|^2-\|\overline{u}\|^2. \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\Delta(h)=2(A\overline{u},Ah)+\|Ah\|^2-2(Ah,\overline{f})+2(\overline{u},h)+\|h\|^2. \tag{7}$$

Так как $\overline{u}=A^*\overline{g}$, а $\overline{f}=A\overline{u}+\overline{g}$, то

$$(Ah,\overline{f})=(A\overline{u},Ah)+(\overline{u},h). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\Delta(h)=\|h\|^2+\|Ah\|^2\geq 0.$$

Метод конечномерной аппроксимации, следуя [8], с. 174, заключается в замене задачи (2) конечномерной

$$\inf\Big\{\|A_nu-\overline{f}_n\|^2+\alpha\|u\|^2:\ u\in H_n\Big\}, \tag{9}$$

где $\overline{f}_n\to\overline{f}$ при $n\to\infty$, а $\{H_n\}$ – возрастающая последовательность конечномерных подпространств пространства H такая, что

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n}\supset H_0^\perp. \tag{10}$$

Решение $\overline{u}_\alpha(n)$ задачи (9) существует и единственно. Следуя [8], с. 174, назовем его конечномерной аппроксимацией.

Введем вспомогательную вариационную задачу

$$\inf\Big\{\|A_nP_nu-\overline{f}_n\|^2+\alpha\|u\|^2:\ u\in H\Big\}, \tag{11}$$

где P_n – оператор метрического проектирования пространства H на H_n.

Лемма 4. *Вариационные задачи (9) и (11) эквивалентны.*

Доказательство очевидно.

Множество $D(A)$ можно превратить в банахово пространство, см. [9], введя в нем A-норму

$$\|u\|_A^2=\|u\|^2+\|Au\|^2,\ u\in D(A).$$

Пусть $M\subset H_0^{\perp}\cap D(A)$, а $L\subset D(A^*)$ и выполняются следующие соотношения

$$\overline{<M>_A}=H_0^{\perp}\cap D(A), \tag{12}$$

$$\overline{<L>}=H,$$

где $<L>$ и $<M>$ – линейные оболочки, порожденные множествами L и M, соответственно, а $\overline{<M>_A}$ – замыкание множества $<M>$ в A-норме. Обозначим через $\overline{A}_n$ сужение оператора A_n на подмножество H_n.

Теорема 1. *Пусть последовательности операторов $\{\overline{A}_n\}$ и $\{P_nA_n^*\}$ являются A и A^*-полными на множествах M и L, соответственно.*

Тогда выполняются следующие соотношения

$$\overline{u}_\alpha(n)\to\overline{u}_\alpha,$$

а при $n\to\infty$ (13)

$$A_n\overline{u}_\alpha(n)\to A\overline{u}_\alpha.$$

Лемма 5. *Пусть $\overline{f}\in R(A)$. Тогда имеют место соотношения $\overline{u}_\alpha\to\overline{u}$, а при $\alpha\to 0$ $A\overline{u}_\alpha\to A\overline{u}$, где $\overline{u}$ – нормальное решение уравнения (1).*

Доказательство см. [7].

Лемма 6. *Если для любых $\alpha>0$, $\overline{f}\in H$ и $\{\overline{f}_n\}\subset H$ таких, что $\overline{f}_n\to\overline{f}$, $\overline{u}_\alpha(n)\to\overline{u}_\alpha$, а $A_n\overline{u}_\alpha(n)\to A\overline{u}_\alpha$, то $\{\overline{A}_n\}$ является A-полной на множестве $H^{\perp}\cap D(A)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется элемент $\overline{u}\in H^{\perp}\cap D(A)$ такой, что для любой последовательности $\{u_n\}$, $u_n\in H_n$

$$\|u_n-\overline{u}\|+\|A_nu_n-A\overline{u}\|\not\to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{14}$$

Из (31) следует существование числа $d>0$ и подпоследовательности $\{n_k\}$ таких, что для любых k и $u\in H_{n_k}$

$$\|u-\overline{u}\|+\|A_{n_k}u-A\overline{u}\|\geq d. \tag{15}$$

Из леммы 5 следует, что для любого натурального l существует $\alpha(l)>0$ такое, что

$$\|\overline{u}_{\alpha(l)}-\overline{u}\|<1/l \tag{16}$$

и

$$\|A\overline{u}_{\alpha(l)}-A\overline{u}\|<1/l. \tag{17}$$

Из предположений леммы следует, что для любого l существует номер $k(l)$ такой, что

$$\|\overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)})-\overline{u}_{\alpha(l)}\|<1/l \tag{18}$$

и

$$\|A_{n_{k(l)}}\overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)})-A\overline{u}_{\alpha(l)}\|<1/l. \tag{19}$$

Из (33–36) следует, что

$$\overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) \in H_{n_{k(l)}},$$

$$\overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) \to \overline{u},$$

а при $l \to \infty$

$$A_{n_{k(l)}}\overline{u}_{\alpha(l)}(n_{k(l)}) \to A\overline{u},$$

что противоречит (32).

Лемма 7. *Область определения $D(AA^*)$ оператора AA^* всюду плотна в H*, см. [10], с. 272.

Обозначим множество $D(AA^*)$ через G.

Лемма 8. *Пусть выполняется соотношение (5). Тогда, если для любых $\alpha > 0$, $\overline{f} \in H$ и $\{\overline{f}_n\} \subset H$, где $\overline{f}_n \to \overline{f}$ при $n \to \infty$, выполняются соотношения леммы (6), то последовательность $\{P_n A_n^*\}$ является A^*-полной на G.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существуют число $d > 0$, элемент $\overline{g} \in G$ и последовательность $\{n_k\}$ такие, что для любого $g \in H$ и любого k

$$\|P_{n_k} A_{n_k}^* g - A^*\overline{g}\| + \|g - \overline{g}\| \geq d. \tag{20}$$

Обозначим элемент $A^*\overline{g}$ через $\overline{u}$. Тогда

$$\overline{u} \in H_0^{\perp} \cap D(A). \tag{21}$$

Из леммы 7 и (38) следует существование последовательности $\{u_k\}$ такой, что для любого k

$$u_k \in H_{n_k}, \tag{22}$$

$$u_k \to \overline{u} \tag{23}$$

и

$$A_{n_k} u_k \to A\overline{u}. \tag{24}$$

Пусть в дальнейшем $\overline{f} = A\overline{u} + \overline{g}$, тогда из леммы 3 следует, что элемент $\overline{u} = A^*\overline{g}$ является решением задачи (2) при $\alpha = 1$ и

$$\overline{u} = A^*(\overline{f} - A\overline{u}). \tag{25}$$

Обозначим через $\overline{u}(n_k)$ решение задачи (11) при $\alpha = 1$ и $\overline{f}_{n_k} = A_{n_k} u_k + \overline{g}$. Тогда из условий настоящей леммы и соотношения (41) следует, что

$$\overline{u}(n_k) \to \overline{u}, \tag{26}$$

а при $k \to \infty$

$$A_{n_k}\overline{u}(n_k) \to A\overline{u}. \tag{27}$$

Из леммы 2 следует, что элемент $\overline{u}(n_k)$ удовлетворяет соотношению

$$P_{n_k} A_{n_k}^* A_{n_k} P_{n_k}\overline{u}(n_k) + \overline{u}(n_k) = P_{n_k} A^* A_{n_k} P_{n_k} u_k + P_{n_k} A_{n_k}^* \overline{g}. \tag{28}$$

Из (45) следует, что

$$\overline{u}(n_k) = P_{n_k} A_{n_k}^* \Big(\overline{g} + (v_k - \overline{v}_k)\Big), \tag{29}$$

где $v_k = A_{n_k} P_{n_k} u_k$, а $\overline{v}_k = A_{n_k} P_{n_k}\overline{u}(n_k)$.

Из (39), (41) и (44) следует, что

$$(v_k - \overline{v}_k) \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty, \tag{30}$$

а из (43) и (46), что

$$P_{n_k} A^*_{n_k}\Big(\overline{g} + (v_k - \overline{v}_k)\Big) \to \overline{u} = A^*\overline{g} \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{31}$$

Соотношения (42), (47) и (48) противоречат (37). Тем самым лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются соотношения (5) и (10). Тогда для того, чтобы при любых* $\alpha > 0$, $\overline{f} \in H$ *и* $\{\overline{f}_n\} \subset H$ *таких, что* $\overline{f}_n \to \overline{f}$ *при* $n \to \infty$, *выполнялись соотношения*

$$\overline{u}_\alpha(n) \to \overline{u}_\alpha$$

и *при* $n \to \infty$

$$A_n \overline{u}_\alpha(n) \to A\overline{u}_\alpha$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ *была* A*-полной на множестве* L, *а* $\{P_n A^*_n\}$ *–* A^**-полной на множестве* G.

Доказательство следует из теоремы 1 и лемм 6, 7, 8.

Заключение

Получены необходимые и достаточные условия сходимости конечномерных аппроксимаций метода регуляризации в случае неиньективного оператора.

Список литературы

1. Танана В.П., Данилин А.Р. Необходимые и достаточные условия сходимости конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений //ДАН СССР. 1982. Т. 264. N 5. С. 1094–1096.

2. Иванов В.К. Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами //Сиб. матем. журн. 1970. Т. 11. N 5. С. 1009–1016.

3. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений /М.: Наука. 1981.

4. Васин В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов //Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19. N 1. С. 11–21.

5. Tanana V.P. A convergence criterion for approximations in the residual method for linear ill-posed problems //J.Inv. Ill-Posed Problems. Vol. 5. No 2. Pp. 193–204 (1997).

6. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач //ДАН СССР. 1963. Т. 153. N 1. С. 49–52.

7. Васин В.В., Танана В.П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода //Мат. зап. Уральск. ун-та. 1968. Т. 6. N 2. С. 27–37.

8. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения //М.: Наука. 1978. 208 с.

9. Васин В.В., Танана В.П. Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач //ДАН СССР. 1974. Т. 215. N 5. С. 1032–1034.

10. Kato T. Perturbation theory for Linear operators //Springer-Verlad New-York Inc. 1966. 592 p.