МАТЕМАТИКА

УДК 517.948

ОБ L-РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П. Танана, А.А. Штаркман
tanana@cgu.chel.su

Челябинский Государственный университет

Статья поступила в редакцию 23 марта 2000 года

В настоящей работе дано обобщение метода регуляризации n-го порядка [1] на класс нелинейных операторных уравнений.

Показано, что в отличии от линейных уравнений L-регуляризация в нелинейном случае позволяет не только учесть априорную информацию о гладкости решения, но и существенно расширить класс регуляризующих алгоритмов.

1. Основные определения

Пусть U, F, G – рефлексивные банаховы пространства, A – оператор с областью определения $D(A) \subset U$ и областью значений $R(A) \subset F$, L – оператор с областью определения $D(L) \subset U$ такой, что $D(A) \cap D(L) \neq \emptyset$ и областью значений $R(L) \subset G$.

Определение 1. *Банахово пространство U будем называть пространством Ефимова-Стечкина, если оно рефлексивно и удовлетворяет условию $u_n \xrightarrow{\text{сл}} u$, $\|u_n\| \to \|u\|$ влечет $u_n \to u$* см. [2], с. 88.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность множеств $\{M_n\}$ из метрического пространства X β-сходится к множеству $M_0 \subset X$, если*

$$\beta(M_n, M_0) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где

$$\beta(M_n, M_0) = \sup\{\rho(x, M_0) : x \in M_n\}$$

и обозначать

$$M_n \xrightarrow{\beta} M_0 \ \text{ см.}[3].$$

Определение 3. *Многозначное отображение φ, действующее из метрического пространства X в метрическое пространство Y, будем называть H-полунепрерывным сверху, если для любого $x \in X$ множество $\varphi(x)$ не пусто и замкнуто, а условие $x_n \to x$ влечет $\varphi(x_n) \xrightarrow{\beta} \varphi(x)$* см. [2], с. 114.

Определение 4. *Оператор A будем называть L-слабо полузамкнутым, если из того, что $Au_n \xrightarrow{\text{сл}} \overline{f}$, а $Lu_n \xrightarrow{\text{сл}} \widetilde{g}$ следует существование элемента $\overline{u} \in D(A) \cap D(L)$ такого, что $A\overline{u} = \overline{f}$ и $\|L\overline{u}\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|Lu_n\|$.*

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где $u \in D(A) \cap D(L), \quad f \in F$.

Определение 5. *Множество $\overline{M}_L \subset D(A) \cap D(L)$ будем называть L-нормальным решением уравнения (1) при $f = \overline{f}$, если для любого $\overline{u} \in \overline{M}_L$, $A\overline{u} = \overline{f}$ и*

$$\|L\overline{u}\| = \inf\Big\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L),\ Au = \overline{f}\Big\} \text{ см. [4].}$$

Теорема 1. *Если оператор A является L-слабо полузамкнутым, то для любого $\overline{f} \in A[D(A) \cap D(L)]$ существует L-нормальное решение $\overline{M}_L$ уравнения (1).*

Определение 6. *Оператор A будем называть L-полузамкнутым сверху, если он L-слабо полузамкнут и из того, что $Au_n \to \overline{f}$, а*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|Lu_n\| \le \inf\Big\{\|Lu\| : u \in D(A) \cap D(L),\ Au = \overline{f}\Big\}$$

следует, что $\rho\Big(u_n, \overline{M}_L\Big) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\overline{M}_L$ – L-нормальное решение уравнения (1).

Определение 7. *Оператор A будем называть слабо замкнутым, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $Au_n \xrightarrow{\text{сл}} \overline{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \overline{f}$* см. [5].

Определение 8. *Операторы A и L будем называть удовлетворяющими условию дополнительности, если найдется число $\lambda > 0$ такое, что для любых u_1, $u_2 \in D(A) \cap D(L)$ имеет место*

$$\|Au_1 - Au_2\| + \|Lu_1 - Lu_2\| \ge \lambda\|u_1 - u_2\|.$$

Теорема 2. *Пусть G является пространством Ефимова-Стечкина, а слабо замкнутые операторы A и L удовлетворяют условию дополнительности.*

Тогда оператор A является L-полузамкнутым сверху.

2. Метод L-регуляризации

Рассмотрим уравнение (1) и предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in D(A) \cap D(L)$, но вместо f_0 нам известно приближенное значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такой, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется по исходной информации $\{f_\delta, \delta\}$ построить приближенное решение u_δ, близкое к L-нормальному решению $\overline{M}_L^0$ уравнения (1) при $f = f_0$.

Метод L-регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf\Big\{\|Au - f_\delta\|^{p_1} + \alpha\|Lu\|^{p_2} :\ u \in D(A) \cap D(L)\Big\}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0;\ p_1,\, p_2 \ge 1$.

Теорема 3. *Если оператор A является L-слабо полузамкнутым, то вариационная задача (2) разрешима.*

Множество решений вариационной задачи (2) обозначим через $M_L^\alpha(\delta)$ и будем называть приближенным решением уравнения (1), полученным методом L-регуляризации.

Теорема 4. *Пусть F и G – пространства Ефимова-Стечкина, а оператор A является L-полузамкнутым сверху.*

Тогда множество $M_L^\alpha(\alpha)$ решений вариационной задачи (2) замкнуто.

Обозначим через $\overline{P}_L^\alpha$ многозначное отображение, которое каждому элементу $\overline{f} \in F$ ставит в соответствие множество $\overline{M}_L^\alpha$ решений вариационной задачи (2) при $f_\delta = \overline{f}$.

Теорема 5. *Пусть F и G – пространства Ефимова-Стечкина, а оператор A является L-полузамкнутым сверху.*

Тогда многозначное отображение $\overline{P}_L^{\alpha}$ *является* H*-непрерывным сверху.*

Теорема 6. *Пусть оператор* A *является* L*-полузамкнутым сверху. Тогда, если параметр* α *связать с уровнем погрешности* δ *таким образом, что*

$$\alpha(\delta) \to 0 \quad \textit{и} \quad \delta^{p_1} \Big/ \alpha(\delta) \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0,$$

то имеет место β*-сходимость приближенных решений* $M_L^{\alpha(\delta)}(\delta)$*, полученных методом* L*-регуляризации, к* L*-нормальному решению* $\overline{M}_L^0$ *уравнения (1).*

Список литературы

1. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач //Докл. АН СССР, 1963, т. 153, N 1, с. 49–52.

2. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. – М.: Наука, 1981, 158 с.

3. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах //Мат. сб., 1963, т. 61, N 2, с. 211–223.

4. Иванов В.К. Линейные неустойчивые задач с многозначными операторами //Сиб. мат. журн., 1970, т. 11, N 5, с. 1009–1016.

5. Танана В.П., Тимонов А.А. О проекционных методах решения нелинейных неустойчивых задач //Докл. АН СССР, 1976, т. 229, N 3, с. 558–561.