Известия Челябинского научного центра, вып. 1, 2001

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ $(\lambda - 1)$-й СТРОКИ ТАБЛИЦЫ ПАДЕ

В.М. АДУКОВ

e-mail: avm@susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2001 года

Пусть $a(z)$ – мероморфная в круге $|z| < R$ и аналитическая в окрестности $z = 0$ функция, имеющая в точках $z_1, \dots, z_\ell$ полюсы кратностей $s_1, \dots, s_\ell$, соответственно, и $s_1 + \dots + s_\ell = \lambda$ – число ее полюсов.

Пусть $a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ – разложение $a(z)$ в степенной ряд в окрестности $z = 0$. *Аппроксимацией Паде* типа (n, m) для $a(z)$ называется рациональная функция $\pi_{n,m}(z) = P_{n,m}(z)/Q_{n,m}(z)$ такая, что взаимно простые многочлены $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют условиям:

$$\deg P_{n,m}(z) \le n, \quad \deg Q_{n,m}(z) \le m, \quad Q_{n,m}(z) \not\equiv 0$$

и

$$a(z)P_{n,m}(z) - Q_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \to 0.$$

При фиксированном m дроби $\pi_{n,m}(z)$ образуют m-ю строку таблицы Паде [1].

Изучению поведения аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$ при $n \to \infty$, m – фиксировано, посвящено много работ (см., например, [1] – [4]). Первый результат о сходимости строк таблицы Паде был получен Монтессу де Болором в 1902 году для строки с номером $m = \lambda$. Ключевым моментом при исследовании сходимости этой строки является доказательство того, что нормированные знаменатели $Q_{n,\lambda}(z)$ сходятся к многочлену $D(z) = (z - z_1)^{s_1} \dots (z - z_\ell)^{s_\ell}$. Тем самым получено описание предельного поведения полюсов $\pi_{n,\lambda}(z)$: каждый полюс $a(z)$ "притягивает" столько полюсов $\pi_{n,\lambda}(z)$, какова его кратность; других предельных точек у множества полюсов последовательности $\pi_{n,\lambda}(z)$ нет.

В общем же случае множество предельных точек полюсов m-й строки, кроме полюсов $z_1, \dots, z_\ell$ функции $a(z)$, может содержать обширное множество дополнительных предельных точек (см. пример в [1]). Может случиться, что для любой подпоследовательности $Q_{n,m}(z)$ дополнительные предельные точки лежат в круге $|z| < R$. В этом случае ни одна подпоследовательность $\pi_{n,m}(z)$ не может сходиться равномерно на компактах, лежащих в круге $|z| < R$ и не содержащих полюсов $a(z)$. Этот факт, опровергающий известную гипотезу Бейкера и Грейвс-Морриса [2], вместе с другими важными результатами о сходимости подпоследовательностей строки был получен в [4].

Однако к настоящему времени ни для одной строки таблицы Паде (кроме $m = \lambda$) нет полного описания множества предельных точек полюсов последовательности $\pi_{n,m}(z)$. Поэтому первый результат Монтессу является также и единственным полным результатом об асимптотическом поведении какой-либо строки таблицы Паде для мероморфной функции.

Между тем, оказывается, что для строки с номером $m = \lambda - 1$ также можно построить полную теорию равномерной сходимости аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$. Это означает, что возможно явное нахождение пределов всех сходящихся подпоследовательностей знаменателей $Q_{n,\lambda-1}(z)$ и, тем самым, полное описание множества предельных точек полюсов $\pi_{n,\lambda-1}(z)$. Определяющим фактором оказалась арифметическая природа тех полюсов $a(z)$ максимального модуля, которые имеют максимальную кратность.

В частности, предел всей последовательности знаменателей $Q_{n,\lambda-1}(z)$ существует тогда и только тогда, когда среди полюсов максимального модуля имеется только один полюс максимальной кратности. Краткому изложению этих результатов и посвящена данная заметка.

Основой нашего подхода является метод существенных многочленов. Алгебраические результаты, полученные этим методом, подитожены в работе [5]; аналитические применения приведены в [6]. Кроме того, этим же методом получен аналог теоремы Монтессу для матричных аппроксимаций Паде [7].

1. Построение монотетических подгрупп тора

Всюду в дальнейшем в обозначениях вида $\pi_{n,m}(z)$ мы опускаем индекс $m = \lambda - 1$.

Пусть для полюсов $a(z)$ справедливо

$$|z_1| = \ldots = |z_\mu| > |z_{\mu+1}| \geq \ldots \geq |z_\ell|.$$

Полюсы $z_1, \ldots, z_\mu$, имеющие максимальный модуль, упорядочим таким образом, чтобы для их кратностей выполнялись условия $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_\mu$. Пусть $s_1 = \ldots = s_\nu > s_{\nu+1} \geq \ldots \geq s_\mu,\ 1 \leq \nu \leq \mu,\ |z_1| = \rho$ и $z_1 = \rho e^{2\pi i \Theta_1}, \ldots, z_\nu = \rho e^{2\pi i \Theta_\nu}$.

Асимптотическое поведение при $n \to \infty$ знаменателей аппроксимаций Паде $a(z)$ определяется предельным поведением вектора

$$\xi^n = \left(e^{2\pi i n \Theta_1}, \ldots, e^{2\pi i n \Theta_\nu}\right) \in \mathbb{T}^\nu.$$

Поэтому нам требуется замыкание в $\mathbb{T}^\nu$ полугруппы $\{\xi^n\}_{n\geq 0}$. Оказывается, что это множество F совпадает с замыканием циклической группы $\{\xi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, т.е. является монотетической подгруппой тора $\mathbb{T}^\nu$. Важность группы F в нашей задаче заключается в том, что она параметризует семейство многочленов, являющихся пределами подпоследовательностей $Q_n(z)$. Применяя стандартные методы теории топологических групп, которые используются при доказательстве теоремы Кронекера о диофантовых приближениях (см., например, [8]), можно получить следующий алгоритм вычисления группы F.

Пусть $\Theta_0 = 1, \Theta_1, \ldots, \Theta_r$ линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и

$$\Theta_j = \sum_{k=0}^{r} q_{kj}\Theta_k, \quad q_{kj} \in \mathbb{Q}, \quad j = r+1, \ldots, \nu.$$

Если $r = \nu$, то $F = \mathbb{T}^\nu$.

Пусть $0 \leq r < \nu$, α_{kk} - наименьший общий знаменатель чисел q_{kj} и $\alpha_{kj} = \alpha_{kk}q_{kj}$ для $k = 0, \ldots, r$; $j = r+1, \ldots, \nu$. Обозначим через A целочисленную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \ldots & 0 & \alpha_{0,r+1} & \ldots & \alpha_{0\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \ldots & \alpha_{r\nu} \end{pmatrix}.$$

Пусть S_1, S_2 – обратимые над кольцом $\mathbb{Z}$ матрицы такие, что $S_1^{-1}AS_2$ имеет диагональную форму Смита над $\mathbb{Z}$. Обозначим через S матрицу, полученную из S_2 вычеркиванием первой строки и первых $r+1$ столбцов. Приведем теперь S к канонической форме Смита:

$$S = T_1\Delta_0T_2^{-1}.$$

Инвариантные факторы матрицы S, определяющие вид множителя Δ_0, обязательно имеют вид $1, \ldots, 1, \sigma$. Обозначим через Q_j строку матрицы T_1^{-1} с номером $\nu - r + j,\ j = 0, \ldots, r$.

Тогда группа F состоит из точек $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu)$ тора $\mathbb{T}^\nu$, имеющих вид

$$\tau = \xi_j^{Q_0}t_1^{Q_1}\ldots t_r^{Q_r}.$$

Здесь

$$\xi_j = e^{\frac{2\pi i j}{\sigma}}, \quad j = 0, \ldots, \sigma - 1,$$

и $(t_1, \ldots, t_r)$ – произвольная точка тора $\mathbb{T}^r$. Кроме того, для вектора $Q = (q_1, \ldots, q_\nu)$ мы обозначили

$$e^{2\pi i Q} = \left(e^{2\pi i q_1}, \ldots, e^{2\pi i q_\nu}\right).$$

Отображение $(j, t_1, \ldots, t_r) \mapsto \tau$ есть изоморфизм групп $\mathbb{Z}_\sigma \times \mathbb{T}^r$ и F.

Теперь нетрудно показать, что для любого $\tau \in F$ существует последовательность Λ_τ номеров $n_1, n_2, \ldots, \quad n_k < n_{k+1}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{2\pi i n \Theta_1}, \ldots, e^{2\pi i n \Theta_\nu}\right) = \tau, \quad n \in \Lambda_\tau.$$

Таким образом, предельное поведение вектора ξ^n получено.

2. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде для $(\lambda - 1)$-й строки

Равномерная сходимость подпоследовательностей $\pi_n(z)$ легко может быть изучена, если известно асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде.

Пусть A_j – коэффициент при $(z - z_j)^{-s_j}$ в разложении мероморфной функции $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$. Определим

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j},$$

где

$$D_j(z) = \frac{D(z)}{(z - z_j)^{s_j}}, \quad 1 \le l \le \ell.$$

Обозначим

$$S_j(\tau) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k z_k^j \tau_k, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu) \in F.$$

Будем называть целое неотрицательное число $\delta_+(\tau)$ $(\delta_-(\tau))$ *плюс-дефектом (минус-дефектом)* точки $\tau \in F$, если $\delta_+(\tau)$ $(\delta_-(\tau))$ – наименьшее число такое, что $S_{\delta_+(\tau)}(\tau) \neq 0$ $(S_{-\delta_-(\tau)-1}(\tau) \neq 0)$. Нетрудно показать, что $0 \le \delta_+(\tau) \le \nu - 1$, $1 \le \delta_-(\tau) \le \nu$. Многочлен будем называть s-нормированным, если его коэффициент при z^s равен 1.

Следующая теорема является основным результатом работы. Без ограничения общности можно считать, что все полюсы $a(z)$ лежат внутри единичной окружности.

Теорема 1. *Пусть τ – произвольная точка группы F и Λ_τ – соответствующая ей последовательность номеров. Тогда для всех достаточно больших $n \in \Lambda_\tau$ знаменатель $Q_n(z)$ аппроксимации Паде типа $(n, \lambda - 1)$ может быть $(\lambda - \delta_+(\tau) - 1)$-нормирован и для нормированных знаменателей существует*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(z) = W(z, \tau), \quad n + \lambda \in \Lambda_\tau, \quad \tau \in F.$$

Здесь $W(z, \tau)$ – многочлен степени $\lambda - \delta_+(\tau) - 1$, имеющий $z = 0$ нулем кратности $\delta_-(\tau)$ и вычисляющийся по формуле:

$$W(z, \tau) = S_{\delta_+(\tau)}^{-1}(\tau) \omega(z, \tau)(z - z_1)^{s_1 - 1} \ldots (z - z_\nu)^{s_\nu - 1} (z - z_{\nu+1})^{s_{\nu+1}} \ldots (z - z_\ell)^{s_\ell},$$

$$\omega(z, \tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z) \tau_j, \quad \Delta_j = \frac{\Delta(z)}{z - z_j}, \quad \Delta(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_\nu).$$

Многочленами $W(z, \tau)$ исчерпываются все возможные пределы подпоследовательностей каким-либо образом нормированных $Q_n(z)$.

Доказательство этой теоремы сначала проводится для случая, когда $a(z)$ – рациональная функция. Тогда знаменатели аппроксимаций Паде удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям, а для коэффициентов знаменателей составляется линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами. При исследовании асимптотики этого уравнения и используется предельное поведение вектора ξ^n.

Общий случай сводится к рациональному. Для этого функция $a(z)$ представляется в виде

$$a(z) = r(z) + b(z),$$

где $r(z)$ – рациональная функция, являющаяся суммой главных частей рядов Лорана для $a(z)$ в окрестности полюсов, а $b(z)$ – аналитическая в круге $|z| < R$ функция. Далее $a(z)$ рассматривается как возмущение рациональной части $r(z)$ аналитической составляющей $b(z)$. Это стало возможным благодаря тому, что существенные индексы последовательности $r_{n-\lambda+2}, \ldots, r_{n+\lambda-1}$, составленной из коэффициентов Тейлора $r(z)$ (определение индексов см. в [5]), оказались устойчивыми при малых возмущениях для всех достаточно больших n. Отметим также, что устойчивость индексов этой последовательности для произвольной рациональной функции $r(z)$ имеет место только для строк с номерами λ, $\lambda-1$. Это показывает в известной мере исключительный характер теоремы Монтессу и теоремы 1. При $m \le \lambda-2$ индексы $r_{n-\lambda+2}, \ldots, r_{n+\lambda-1}$ для некоторых последовательностей номеров n также будут устойчивыми. Поэтому возможно, что и в этом случае имеет место аналог теоремы 1, но уже не для всех подпоследовательностей $Q_n(z)$.

Итак, предельное поведение полюсов аппроксимаций Паде $\pi_n(z)$ для $(\lambda-1)$-строки полностью описано. Для любой подпоследовательности $\pi_n(z)$ $s_j - 1$ полюсов $\pi_n(z)$ стремятся к z_j ("притягиваются" этим полюсом) для $j = 1, \ldots, \nu$ и s_j полюсов стремятся к z_j для $j = \nu+1, \ldots, \ell$. Это означает, что изучение строк с номерами $m = \lambda$ (по теореме Монтессу) и $m = \lambda - 1$ (по теореме 1) позволяет не только локализовать полюсы, но и выделить среди них полюсы максимального модуля и максимальной кратности.

Кроме того, если $n + \lambda \in \Lambda_\tau$, $\tau \in F$, то $\delta_+(\tau)$ полюсов $\pi_n(z)$ стремятся к бесконечности при $n \to \infty$, а $\delta_-(\tau)$ – к нулю. Этот факт позволяет найти $\delta_+(\tau) + \delta_-(\tau)$ зависимостей (вида $S_j(\tau) = 0$) между коэффициентами A_j лорановского разложения $a(z)$. Оставшиеся $\nu - \delta_+(\tau) - \delta_-(\tau) - 1$ полюсов $\pi_n(z)$ стремятся к конечным ненулевым корням многочлена $\omega(z,\tau)$, причем легко видеть, что эти корни отличны от $z_1, \ldots, z_\ell$.

Геометрию множества дополнительных предельных точек мы изучим в следующей работе. Там же мы увидим, что изучение этой геометрии также может дать дополнительную информацию о полюсах $a(z)$ и соответствующих им лорановских коэффициентах A_j.

После того, как получена теорема 1, уже нетрудно доказать равномерную сходимость на компактах подпоследовательности $\pi_n(z)$.

Теорема 2. *Пусть τ – произвольная точка группы параметров F и Λ_τ – соответствующая ей последовательность номеров. Пусть K_τ – любой компакт, лежащий в круге $|z| < \rho$ и не содержащий нулей многочлена $W(z,\tau)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi_n(z) - a(z)\|_{C(K_\tau)} = 0, \quad n + \lambda \in \Lambda_\tau.$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству завершающей части теоремы Монтессу из монографии [1].

Заключение

Для $(\lambda-1)$-й строки таблицы Паде мероморфной функции $a(z)$ получено полное описание асимптотического поведения знаменателей $Q_n(z)$ аппроксимаций Паде. Явно вычислены пределы всех сходящихся подпоследовательностей $Q_n(z)$. Эти пределы образуют семейство многочленов $W(z,\tau)$, параметризованное монотетической подгруппой F тора $\mathbb{T}^\nu$. Группа F строится по аргументам $\Theta_1,\ldots,\Theta_\nu$ тех полюсов $a(z)$ максимального модуля, которые имеют максимальную кратность.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 01-01-96422.

Список литературы

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. – *Аппроксимации Паде*// М.: Мир, 1986. – 502 с.

2. Baker G.A., Jr., Graves-Morris P.R. – Convergence of rows of the Padé table// *J. Math. Anal. Appl.* 1977. V. 57. P. 323-339.

3. Гончар А.А. – Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций// *Матем. сб.* 1981. Т. 115(157). N 4. С. 590-613.

4. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. – О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде// *Матем. сб.* 1983. Т. 120(162). N 4. С. 540–545.

5. Adukov V.M. – Generalized inversion of block Toeplitz matrices// *Linear Algebra Appl.* 1998. V. 274. P. 85-124.

6. Адуков В.М. – Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций// *Алгебра и анализ.* 1992. Т. 4. Вып. 1. С. 54-74.

7. Adukov V.M. – On the row convergence of matrix Padé approximants// Тр. междунар. конф. *Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы.* Уфа, 2000. С. 210-214.

8. Моррис С. – *Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп*// М.: Мир, 1980. – 102 с.