

УДК 532.59

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

Л.А. Прокудина

e-mail: algebra@mailserv.susu.ac.ru

Южно–Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 31 января 2001 г.

Введение

Исследование жидких пленок имеет большое прикладное значение, поскольку их течение реализуется в многочисленных тепломассообменных аппаратах (испарителях, конденсаторах, камерах сгорания, дистилляторах, теплообменниках и др.). В жидкой пленке, являющейся нелинейной открытой системой (обмен энергией, веществом, информацией), в результате развития неустойчивости осуществляется переход от ее старого состояния в новое состояние. Реализуемость того или иного состояния связана с нелинейным развитием и взаимодействием возмущений из непрерывной полосы спектра волновых чисел (волнового пакета). Система уравнений, описывающих течение жидкой пленки по наклонной плоской поверхности под действием силы тяжести и касательного напряжения на поверхности раздела газ–жидкость в условиях интенсивного тепломассопереноса, с граничными условиями на поверхности раздела, учитывающими термокапиллярные, концентрационно–капиллярные эффекты и силы поверхностной вязкости [1, 2], сведена к уравнению Гинзбурга–Ландау. Исследуем процесс образования нового упорядоченного состояния в нелинейной диспергирующей системе.

Теоретическая часть

Для неустойчивого течения неизотермической жидкой пленки получено нелинейное параболическое уравнение для амплитуды $A(\eta, t_2)$ огибающей волны (уравнение Гинзбурга–Ландау) [2, 3]:

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{i}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \omega_j}{\partial k_x} \cdot \frac{\partial A}{\partial \eta} - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k_x^2} + i \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = \frac{\omega_j}{\varepsilon^2} A - (\beta_1 + i\beta_2) |A|^2 A, \quad (1)$$

где t — время; η — пространственная координата; ω_r — частота; ω_j — инкремент; k_x — волновое число; β_1, β_2 — постоянные Ландау.

Частота, инкремент и волновое число связаны дисперсионным уравнением:

$$\omega(a_7 k_x + i) + a_1 k_x^4 - a_4 i k_x^3 - a_6 k_x^2 + a_{11} i k_x - (\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Ku})^{-1} = 0, \quad (2)$$

где $\omega = \omega_r + i \cdot \omega_j$; Re — число Рейнольдса; Pr — число Прандтля; Ku — число фазового перехода.

Коэффициенты уравнения (2) имеют вид:

$$a_1 = -\frac{\text{Re } \sigma}{3}, \quad a_4 = -\frac{\text{Re}^2 F_x N}{2}, \quad a_6 = a_6^* + a_6^1,$$

$$a_6^* = -\frac{\text{Re } F_y}{3} - \frac{\text{Re } M}{2} + \frac{3}{40} \text{Re}^3 F_x (\tau_x + F_x), \quad a_6^1 = \frac{2}{3} \text{Re} \cdot \text{sign } \Delta T \frac{C}{(\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Ku})^2},$$

$$a_{11} = -\text{Re } F_x - \text{Re } \tau_x,$$

где σ — параметр поверхностного натяжения; N — параметр поверхностной вязкости; M — параметр Марангони; τ_x — постоянное касательное напряжение на поверхности раздела.

Постоянные Ландау уравнения (1) характеризуют: β_1 — нелинейное затухание возмущений (рис. 1), а β_2 — нелинейную зависимость фазы от амплитуды (рис. 2).

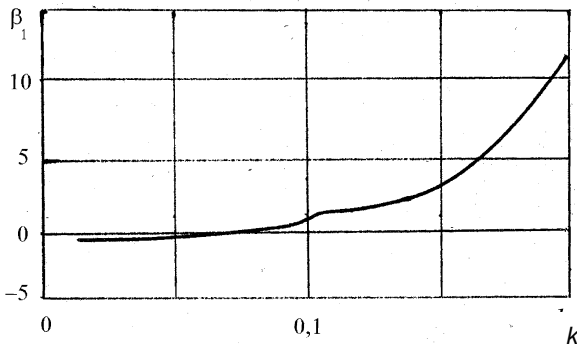


Рис. 1. Зависимость β_1 от волнового числа k для $\text{Re} = 10$

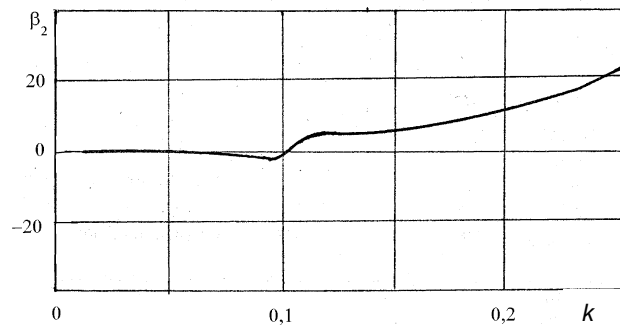


Рис. 2. Зависимость β_2 от волнового числа k для $\text{Re} = 10$

Вычислительный эксперимент по эволюции волнового пакета при нелинейной дисперсии для диапазона чисел Рейнольдса $\text{Re} \leq 15$ вертикальной жидкой пленки проведен в рамках одномерного уравнения Гинзбурга–Ландау (1), которое в переменных [4]:

$$A_0 = A \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \beta_1}{\omega_j}}; \quad \tau = \frac{t_2 \omega_j}{\varepsilon^2}; \quad \eta_0 = \eta \sqrt{\frac{2\omega_j}{\varepsilon^2 \left| \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_x^2} \right|}}$$

имеет вид:

$$\frac{\partial A_0}{\partial \tau} + i\alpha_3 \frac{\partial A_0}{\partial \eta_0} + \left(\text{sign} \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_x^2} - i\alpha_1 \right) \frac{\partial^2 A_0}{\partial \eta_0^2} = A_0 - (1 + i\alpha_2) |A_0|^2 A_0, \quad (3)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_x^2}}{\left| \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_x^2} \right|}; \quad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta}; \quad \alpha_3 = \frac{\partial \omega_j}{\partial k_x} \sqrt{\frac{2}{\omega_j \left| \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial k_x^2} \right|}}.$$

Нелинейное развитие волновых пакетов рассчитывалось методом прямых. После подстановки $A_0 = U + iV$ в уравнение (3) разделены действительная и мнимая части. Производные по пространственной координате заменены конечными разностями и осуществлен переход от системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения полученной системы дифференциальных уравнений использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Рассматривался волновой пакет шириной $\Delta k = 0(\varepsilon)$ с центром на гармонике максимального инкремента. Длина участка L , занятого возбужденным волновым

пакетом, и интервал дискретности волнового пакета связаны соотношением $\Delta k = 2\pi/L$. На концах отрезка L принимались периодические граничные условия. Численный расчет осуществлен для диспергирующей системы с коэффициентами уравнения (3) $\alpha_1 = 0,147$; $\alpha_2 = 5,63$; $\alpha_3 = 0$ для $L = 50$. Число внутренних прямых равнялось 99.

Характер нелинейного взаимодействия возмущений зависит от наличия нелинейной дисперсии, т. е. зависимости частоты колебаний от их амплитуды, и от числа возбужденных мод, обладающих инкрементом. В момент времени до 0,2 происходит увеличение энергии модуляционно неустойчивых мод. Существующая, согласно начальным условиям, неоднородность амплитуды по пространственной координате порождает пространственные производные фазы. Локальные значения производных фазы достаточно большие, что приводит к уменьшению инкремента и локальному уменьшению амплитуды, на рис. 3, а видно появление «пики» амплитуды центральной гармоники. Значительные производные амплитуды вновь оказывают влияние на изменение фазы, усиливается модуляционная неустойчивость, процесс сопровождается появлением «трещин» на графике амплитуды огибающей (см. рис. 3, а). Амплитуды симметричных относительно центра волнового пакета мод равны. Появления трещин на временном интервале $0,2 < t < 0,6$ сопровождается резким падением энергии мод, обладающих инкрементом. В последующие моменты времени идет процесс нарастания и сосредоточения энергии в модуляционно неустойчивых модах.

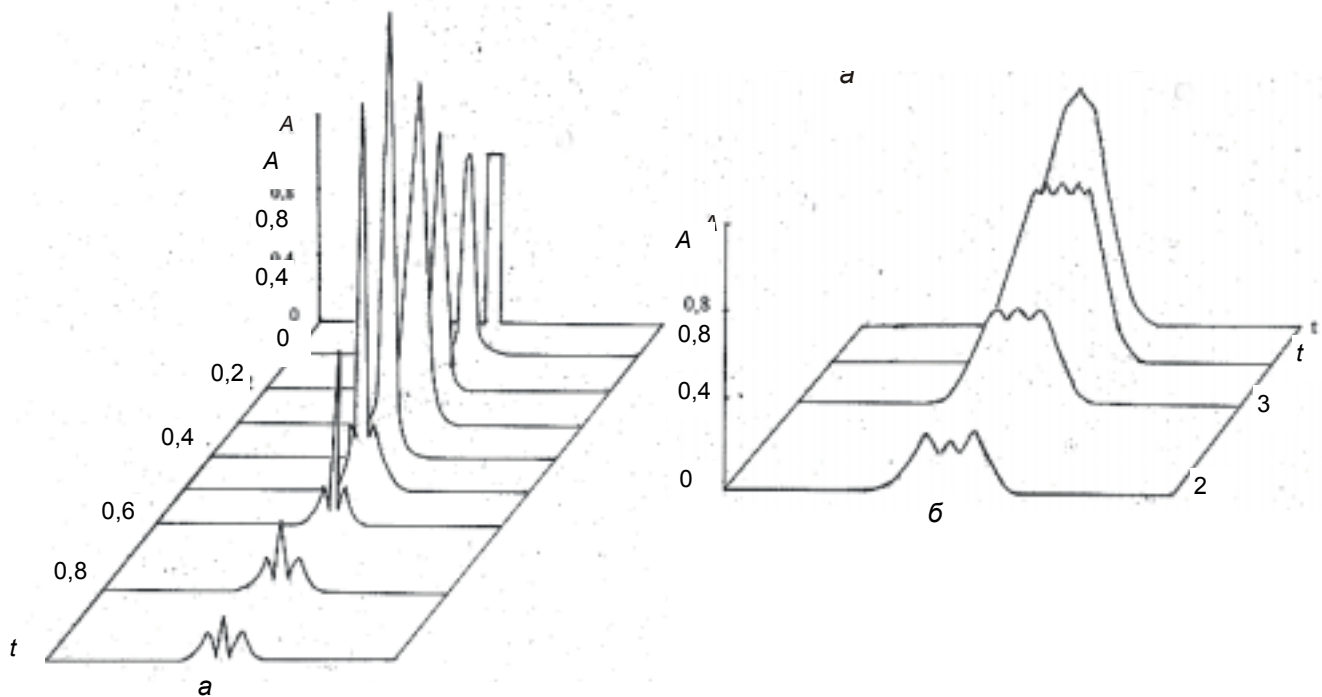


Рис. 3. Амплитуда огибающей волнового пакета:

а — для времени $0 \leq t \leq 1$; б — для $2 \leq t \leq 4$

На временном интервале $2 < t < 3,6$ происходит уменьшение величины производных фазы, дальнейшее нарастание инкремента ведет к увеличению амплитуды модуляционно неустойчивых мод (рис. 3, б). При нелинейной зависимости фазы от амплитуды для $t \geq 3,6$ результаты вычислительного эксперимента показали, что амплитуды мод, обладающих инкрементом, в результате нелинейного роста и взаимодействия значительно превосходят амплитуды остальных мод возбужденного волнового пакета и обеспечивают увеличение амплитуды огибающей, например, к моменту времени $t = 4$ примерно в десять раз по отношению к ее начальной величине. В это же время наблюдался сброс энергии в моды с декрементом, что привело к значительному росту их амплитуд. В свою очередь рост амплитуд ведет к изменению фазы этих мод, которое меняет направление потока энергии от мод с декрементом к модам с инкрементам. Амплитуды мод с декрементом стремятся к нулю.

Заключение

Представлены результаты нелинейного анализа неустойчивости течения неизотермической жидкой пленки. Моделирование нелинейного развития возмущений из непрерывной полосы волновых чисел в рамках нелинейного параболического уравнения Гинзбурга–Ландау показало, что при нелинейной дисперсии энергия волнового пакета сосредотачивается в модах, обладающих инкрементом, отмечен значительный рост их амплитуды, расширение спектра волнового пакета не происходит.

Список литературы

1. Прокудина Л.А., Вяткин Г.П. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки // Доклады РАН. — 1998. — Т. 362, № 6. — С. 770—772.
2. Прокудина Л.А., Вяткин Г.П. Волновое течение неизотермической жидкой пленки // Препринт. — Челябинск, ЮУрГУ, 1998. — 42 с.
3. Холпанов Л.П. Самоорганизация и динамический хаос // Теоретические основы химической технологии. — 1998. — Т. 32, № 4. — С. 355—368.
4. Елюхин В.А., Прокудина Л.А. Возникновение многомодовой турбулентности в гидродинамических системах с нелинейным перекрытием резонансов // Департамент в ВИНТИ. — Челябинск, 1984. — № 561–84. — 13 с.