Известия Челябинского научного центра, вып. 1 (14), 2002

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ТОПОЛОГИЯХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В АППРОКСИМАЦИОННЫХ МЕТОДАХ[1]

А.В. Танана
e–mail: tanana@csu.ac.ru

Южно–Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 11 января 2002 г.

В настоящей статье исследуются некоторые типы сходимостей последовательностей операторов, используемых в теории возмущений [1] и аппроксимационных методах [2] и [3].

Обозначим через U и F — рефлексивные банаховы пространства, а через U' и F' — им сопряженные. Пусть A, A_n — линейные ограниченные операторы, отображающие U в F, а A' и A_n' — сопряженные им. В дальнейшем всюду будем предполагать, что последовательность операторов $\{A_n\}$ равномерно ограничена.

Определение 1. Банахово пространство U будем называть E–пространством, если оно рефлексивно, строго выпукло и из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} u$, а $\|u_n\| \to \|u\|$, следует, что $u_n \to u$, см. [4].

Так как в [5], на с. 130, доказано, что в каждом рефлексивном банаховом пространстве можно определить эквивалентную норму так, чтобы и само пространство и его сопряженное были E–пространствами, то в дальнейшем, при исследовании топологических свойств операторов, будем, без ограничения общности, полагать, что U, U', F и F' являются E–пространствами.

1. Основные понятия и определения

Определение 2. Последовательность операторов $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору A, если для любого $u \in U$

$$A_n u \to Au,$$

см. [6], с. 148.

Определение 3. Последовательность операторов $\{A_n\}$ слабо равномерно сходится к оператору A, если для любого $g \in F'$

$$\sup \left\{ \left| g(A_n u) - g(Au) \right| : \| u \| \le 1 \right\} \to 0,$$

при $n \to \infty$, см. [2], с. 171.

Определение 4. Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо замкнутой, если из того, что

$$u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u},$$

а

$$A_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} \overline{f}$$

следует, что $A\hat{u} = \overline{f}$, см. [3].

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 01–01–00300

Определение 5. Последовательность операторов $\{A_n\}$ будем называть слабо предельно непрерывной, если из того, что

$$u_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$$

следует, что

$$A_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} 0,$$

см. [1], с. 63.

Теорема 1. Для того чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ слабо равномерно сходилась к оператору A необходимо и достаточно, чтобы из того, что

$$u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u},$$

следовало

$$A_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} A\hat{u}.$$

Теорема 2. Для того чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ слабо равномерно сходилась к оператору A необходимо и достаточно, чтобы для любой подпоследовательности $\{A_{n_k}\}$ соответствующая пара A, $\{A_{n_k}\}$ была слабо замкнута.

Теорема 3. Для того чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ слабо равномерно сходилась к оператору A необходимо и достаточно, чтобы A'_n поточечно сходилась к A'.

Теорема 4. Для того чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ была слабо предельно непрерывной необходимо и достаточно, чтобы для любого функционала $g \in F'$ последовательность $\{A'_n g\}$ была компактна в U'.

Теорема 5. Если пространство F сепарабельно, то для слабо предельной непрерывности последовательности операторов $\{A_n\}$ необходима и достаточна секвенциальная компактность этой последовательности в топологии слабо равномерной сходимости пространства операторов.

Теорема 6. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору A. Тогда для того, чтобы последовательность $\{A_n\}$ сходилась к A слабо равномерно, необходимо и достаточно, чтобы она была предельно непрерывной.

Теперь покажем, что последовательность операторов $\{A_n\}$ не является слабо предельно непрерывной.

Для этого рассмотрим последовательность $\{\bar{v}^n\}$ такую, что для любого n

$$\bar{v}^n = \left(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \overset{n}{1},\ 0,\ \ldots\right).$$

Очевидно, что

$$\bar{v}^n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{0},$$

а для любого k

$$A_{2k}\bar{v}^{2k} = (1,\ 0,\ \ldots) \neq \bar{0}.$$

Таким образом, в методах аппроксимации предпочтительнее использовать слабо предельную непрерывность аппроксимирующей последовательности операторов $\{A_n\}$ как более просто проверяемую и совпадающую со слабо равномерной сходимостью, при условии поточечной сходимости.

Что касается слабой замкнутости пары A, $\{A_n\}$, то самым серьезным недостатком этого понятия является нарушение его наследственности, т. е. слабой замкнутости пары A, $\{A_{n_k}\}$ для любой подпоследовательности операторов $\{A_{n_k}\}$. Как следует из примера пары A, $\{A_n\}$, определяемой формулами (33), (34), наследственность слабой замкнутости отсутствует даже при условии поточечной сходимости последовательности операторов $\{A_n\}$ к оператору A.

Таким образом, при использовании этого понятия в аппроксимационных теориях необходимо требовать слабую замкнутость пары A, $\{A_{n_k}\}$ для любой подпоследовательности $\{A_{n_k}\}$, что делает это свойство трудно проверяемым.

2. Метод конечномерной аппроксимации

Пусть в дальнейшем $U = F = H$, где H — сепарабельное гильбертово пространство, а оператор A — инъективен и его область значений $R(A)$ всюду плотна в H.

Обозначим через $\{H_n\}$ возрастающую последовательность конечномерных подпространств такую, что

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n} = H. \tag{1}$$

Рассмотрим уравнение

$$Au = \bar{f}, \tag{2}$$

где u, $\bar{f} \in H$.

Метод регуляризации приближенного решения уравнения (2), следуя [2], с. 70, заключается в сведении уравнения (2) к вариационной задаче

$$\inf\left\{ \left\| Au - \bar{f} \right\|^2 + \alpha \| u \|^2 :\ u \in H \right\}, \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Из теоремы, приведенной в [2], с. 71, следует существование и единственность решения $\bar{u}_\alpha$ задачи (3).

Метод конечномерной аппроксимации, следуя [2], с. 174, заключается в замене задачи (3) конечномерной

$$\inf\left\{ \left\| A_n u - \bar{f}_n \right\|^2 + \alpha \| u \|^2 :\ u \in H_n \right\}, \tag{4}$$

где $\bar{f}_n \to \bar{f}$ при $n \to \infty$.

Решение задачи (4) обозначим через $\bar{u}_\alpha(n)$ и назовем, следуя [2], с. 144, конечномерной аппроксимацией.

Теорема 7. Для того чтобы при любых $\alpha > 0$ и $\bar{f} \in F$ имела место сходимость $\bar{u}_\alpha(n)$ к $\bar{u}_\alpha$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{A_n\}$ была слабо предельно непрерывна и поточечно сходилась к оператору A.

Из теоремы 7 можно сделать следующее полезное следствие.

Пусть L и $M \subset H$, и линейные оболочки этих множеств всюду плотны в H.

Следствие. Для того чтобы при любых $\alpha > 0$, $\bar{f} \in F$ имела место сходимость $\bar{u}_\alpha(n)$ к $\bar{u}_\alpha$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы для любых $u \in L$ и $g \in M$ выполнялись соотношения

$$A_n u \to Au \ \text{ и } \ A_n' g \to A' g$$

при $n \to \infty$.

Заключение

Получены необходимые и достаточные условия слабо равномерной сходимости последовательности операторов в разных терминах. Также найдены критерии слабо предельно непрерывной последовательности операторов. В случае сепарабельных пространств получены более точные результаты о слабо равномерной топологии.

Список литературы

1. Маслов В.П. Асимптотически методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988. — 310 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
3. Васин В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журнал вычислит. мат. и мат. физ. — 1979. — Т. 19, 1. — С. 11—21.
4. Ky Fan, Glicksberg I. Some Geometric Properties of the Spheres in a Normed Linear Space. — Duke Math. J. — 1958. — Vol. 25, No 4. — P. 553—568.
5. Дистель Д. Геометрия банаховых пространств. — Киев: Высшая школа, 1980.