Известия Челябинского научного центра, вып. 3(16), 2002

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

О СУЩЕСТВОВАНИИ СХОДЯЩИХСЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СТРОКИ ТАБЛИЦЫ ПАДЕ ДЛЯ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ [1]

В.М. Адуков
e-mail: avm@susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила в редакцию 10 июня 2002 года

Пусть $a(z)$ – аналитическая в окрестности $z = 0$ функция, $D_m = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z| < R_m\}$ – круг m-мероморфности функции $a(z)$, т.е. максимальный открытый круг с центром в нуле, в который $a(z)$ продолжается как мероморфная функция, имеющая не более m полюсов. Дж. Бейкером и П. Грейвс-Моррисом (см., например, [1]) была высказана гипотеза, что *для любых* $a(z)$ *и* m *существует подпоследовательность* $\pi_{n,m}(z)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, m*-ой строки таблицы Паде для* $a(z)$, *равномерно сходящаяся к* $a(z)$ *на компактах, принадлежащих* D_m *и не содержащих полюсов* $a(z)$. В.И. Буслаевым, А.А. Гончаром и С.П. Суетиным [2] показано, что гипотеза справедлива для всех мероморфных функций при $R_m = \infty$. В общем же случае предположение неверно, как показывает простой контрпример, приведенный этими авторами.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда для радиусов m-мероморфности $a(z)$ выполняется условие $R_m < R_{m+1}$, и получим некоторые достаточные условия, при которых гипотеза Бейкера-Грейвс-Морриса верна. Легко видеть, что $R_m < R_{m+1}$ тогда и только тогда, когда в замкнутом круге $|z| \le R_m$ лежит ровно $m+1$ полюсов. Поэтому к строке с номером m применима теория, развитая в статьях [3-4].

Пусть $z_1, \dots, z_\ell$ – полюсы $a(z)$ в круге $|z| \le R_m$ кратностей $s_1, \dots, s_\ell$, соответственно; $s_1 + \ldots + s_\ell = m+1$. Асимптотическое поведение последовательности $\pi_{n,m}(z)$ при $n \to \infty$ в этом случае в основном определяется арифметической природой доминирующих полюсов $z_1, \dots, z_\nu$ функции $a(z)$. Доминирующими полюсами мы называем те полюсы $a(z)$, лежащие на окружности $|z| = R_m$, которые имеют максимальную кратность. В работе [3] найдены пределы всех сходящихся подпоследовательностей $\pi_{n,m}(z)$ и показано, что предельные точки множества полюсов последовательности $\{\pi_{n,m}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ состоят из полюсов $z_1, \dots, z_\ell$ функции $a(z)$ и множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ дополнительных предельных точек, состоящего из нулей семейства многочленов $\omega(z,\tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z) \tau_j$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in \mathbb{F}$. Здесь $\mathbb{F}$ – монотетическая подгруппа тора $\mathbb{T}^\nu$, полученная замыканием циклической группы с образующей $\left(e^{2\pi i \Theta_1}, \dots, e^{2\pi i \Theta_\nu}\right)$; $2\pi i \Theta_j$ – аргумент z_j. Эта группа явно вычислена в [3]. Формула для вычисления коэффициентов C_j имеет вид:

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j},$$

где $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $D(z) = (z - z_1)^{s_1} \dots (z - z_\ell)^{s_\ell}$ и A_j – коэффициент при $(z - z_j)^{-s_j}$ в разложении $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$. Многочлены $\Delta_j(z)$ определяются следующим образом: $\Delta_j(z) = \frac{\Delta(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $\Delta(z) = (z - z_1) \dots (z - z_\nu)$.

---

[1] Работа поддержана РФФИ-Урал (грант N 01-01-96422)

Геометрия множества $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ во многих важных случаях описана в [4]. В частности, $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ всегда содержится в множестве $\mathcal{N}$, которое состоит из точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|C_j\Delta_j(z)\right| \le \sum_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{\nu} \left|C_k\Delta_k(z)\right|, \ \ j=1,\ldots,\nu.$$

Множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ может совпадать с $\mathcal{N}$. Это осуществляется, например, если $\Theta_0=1,\Theta_1,\ldots,\Theta_\nu$ линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или если $\Theta_0=1,\Theta_1,\ldots,\Theta_{\nu-1}$ линейно независимы, а Θ_ν - рациональное число (см. [4], теорема 3 и теорема 4).

Имея это описание множества предельных точек полюсов $\{\pi_{n,m}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, мы можем указать некоторые достаточные условия, при выполнении которых гипотеза Бейкера-Грейвс-Морриса верна.

1. Теорема 1 из [4] утверждает, что при условии $R_m<R_{m+1}$ и $\nu=1$ гипотеза справедлива, причем для $\Lambda=\mathbb{N}$. Оказывается, что теорема 2 из той же работы влечет за собой справедливость гипотезы и при $\nu=2$.

Теорема 1. *Пусть $R_m<R_{m+1}$ и функция $a(z)$ имеет два доминирующих полюса z_1, z_2. Тогда существует подпоследовательность $\pi_{n,m}(z)$, равномерно сходящаяся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих D_m и не содержащих полюсов $a(z)$.*

Доказательство. При $\nu=2$ дополнительные предельные точки лежат на окружности Аполлония $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\left|\dfrac{C_1}{C_2}\right|$ (см. [4], теорема 2) и многочлены $\omega(z,\tau)$, корнями которых являются эти точки, имеют по переменной z степень 1.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что найдется точка $\tau\in\mathbb{F}$, для которой корень многочлена $\omega(z,\tau)$ будет лежать вне круга $|z|<R_m$. Искомая последовательность номеров Λ будет тогда Λ_τ (см. теорему 1 из [3]).

В случае, когда полюсы z_1, z_2 не лежат в точках деления окружности $|z|=R_m$ на равные части, это очевидно, поскольку окружность $|z|=R_m$ и окружность Аполлония, целиком состоящая из дополнительных предельных точек, ортогональны. Следовательно, вне круга $|z|<R_m$ находится бесконечно много корней многочленов $\omega(z,\tau)$.

Пусть теперь полюсы z_1 и z_2 лежат в точках деления окружности на σ равных частей:

$$z_1=R_m\,e^{i\alpha}, \ \ z_2=z_1\,e^{\frac{2\pi ik}{\sigma}}, \quad 0<k\le\sigma-1.$$

По теореме 5 из статьи [4] множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ есть объединение множества нулей многочленов $\omega_j(z)=C_1z_1^j(z-z_2)+C_2z_2^j(z-z_1)$.

Если имеется вырождение, т.е. для некоторого (единственного) j_0 справедливо $C_1z_1^{j_0}+C_2z_2^{j_0}=0$, то $\omega_{j_0}(z)\equiv\mathrm{const}$. Значит, последовательность номеров $n\sigma+j_0,\ n\in\mathbb{N}$, есть искомая.

Предположим теперь, что $C_1z_1^j+C_2z_2^j\ne0$ для всех $j=0,1,\ldots,\sigma-1$. Тогда

$$\zeta_j=\frac{C_1z_1^jz_2+C_2z_2^jz_1}{C_1z_1^j+C_2z_2^j}, \quad j=0,1,\ldots,\sigma-1,$$

– нули многочленов $\omega_j(z)$. Если все эти нули лежат внутри окружности $|z|=R_m$, то справедливо

$$\left|C_1+C_2e^{\frac{2\pi ik(j-1)}{\sigma}}\right|<\left|C_1+C_2e^{\frac{2\pi ikj}{\sigma}}\right|, \quad j=0,1,\ldots,\sigma-1.$$

Таким образом, должно выполняться неравенство

$$\left|C_1+C_2e^{\frac{-2\pi ik}{\sigma}}\right|<\left|C_1+C_2e^{\frac{2\pi ik(\sigma-1)}{\sigma}}\right|=\left|C_1+C_2e^{\frac{-2\pi ik}{\sigma}}\right|,$$

что невозможно. Поэтому хотя бы для одного номера j_0, $0 \le j_0 \le \sigma - 1$, корень многочлена $\omega_{j_0}(z)$ лежит в области $|z| \ge R_m$. Последовательность номеров $n\sigma + j_0, \ \ n \in \mathbb{N}$, и будет искомой. ■

2. Граница множества $\mathcal{N}$ есть линия $L = \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} L_j$, где L_j определяется уравнением

$$\bigl|C_j\Delta_j(z)\bigr| = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} \bigl|C_k\Delta_k(z)\bigr|, \ \ j = 1, \ldots, \nu.$$

Легко проверить, что линия L_j симметрична относительно окружности $|z| = R_m$. Для получения еще одного достаточного условия существования сходящейся подпоследовательности нам потребуется две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть $w_1, \ldots, w_\nu$ – комплексные числа такие, что $w_1 + \ldots + w_\nu = 0$ и $|w_1| = |w_2| + \ldots + |w_\nu|$. Тогда если $w_1 = |w_1|e^{i\varphi}$, то $w_j = -|w_j|e^{i\varphi}$, $j = 2, \ldots, \nu$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что w_1 – действительное положительное число. Тогда

$$w_1 = |w_2| + \ldots + |w_\nu| = -(\operatorname{Re} w_2 + \ldots + \operatorname{Re} w_\nu).$$

Это означает, что $\operatorname{Re} w_j = -|w_j|$, т.е. $w_j = -|w_j|$ для $j = 2, \ldots, \nu$. ■

Лемма 2. *Для любых различных точек $z_1, \ldots, z_\nu$, лежащих на окружности $|z| = R$, и для любых действительных положительных чисел $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ все нули рациональной функции*

$$f(z) = \sum_{j=2}^{\nu} \alpha_j \frac{z_1 - z_j}{z - z_j}$$

лежат на окружности $|z| = R$.

Доказательство. Предположим, что существует нуль z_0 функции $f(z)$, не лежащий на окружности $|z| = R$. Применим дробно-линейное преобразование $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_1}{z - z_0}$. Так как z_0 не лежит на окружности $|z| = R$, то преобразование w переводит эту окружность в окружность, проходящую через точку $w = 0$. Угол α выберем так, чтобы окружность находилась в полуплоскости $\operatorname{Re} w \ge 0$. Тогда точки $w_j = e^{i\varphi}\dfrac{z_j - z_1}{z_j - z_0}$ лежат в открытой правой полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и потому

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\varphi}\sum_{j=2}^{\nu} \alpha_j \frac{z_1 - z_j}{z_0 - z_j}\right) > 0.$$

Но это противоречит тому, что z_0 – нуль $f(z)$. ■

Теорема 2. *Пусть $R_m < R_{m+1}$ и на окружности $|z| = R_m$ функция $a(z)$ имеет ν доминирующих полюсов $z_1 = e^{2\pi i\Theta_1}, \ldots, z_\nu = e^{2\pi i\Theta_\nu}$. Если множество $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ содержит хотя бы одну из линий $L_1, \ldots, L_\nu$, то существует подпоследовательность $\pi_{n,m}(z)$, равномерно сходящаяся при $n \to \infty$ к $a(z)$ на компактах, принадлежащих D_m и не содержащих полюсов $a(z)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что существует точка $\tau^0 \in \mathbb{F}$ такая, что многочлен $\omega(z, \tau^0)$ из семейства $\omega(z,\tau)_{\tau\in\mathbb{F}}$ не имеет нулей в открытом круге $|z| < R$.

Пусть для определенности L_1 принадлежит $\mathcal{N}_{\mathbb{F}}$. Так как L_1 симметрична относительно окружности $|z| = R$, то найдется точка ζ_0 такая, что $|\zeta_0| > R$ и

$$|C_1\Delta_1(\zeta_0)| = \sum_{j=2}^{\nu} |C_j\Delta_j(\zeta_0)|.$$

Поскольку $L_1 \subset \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$, то найдется точка $\tau^0 = \left(\tau_1^0, \ldots, \tau_\nu^0\right) \in \mathbb{F}$ такая, что

$$\omega(\zeta_0, \tau^0) = C_1 \Delta_1(\zeta_0) \tau_1^0 + \ldots + C_\nu \Delta_\nu(\zeta_0) \tau_\nu^0 = 0.$$

По лемме 1 получаем

$$C_1 \Delta_1(\zeta_0) \tau_1^0 = |C_1 \Delta_1(\zeta_0)| e^{i\varphi}, \;\; C_j \Delta_j(\zeta_0) \tau_1^0 = -|C_j \Delta_j(\zeta_0)| e^{i\varphi},$$

$j = 2, \ldots, \nu$. Следовательно,

$$\tau^0 = -e^{i\varphi} \left(-\frac{|C_1 \Delta_1(\zeta_0)|}{C_1 \Delta_1(\zeta_0)}, \frac{|C_2 \Delta_2(\zeta_0)|}{C_2 \Delta_2(\zeta_0)}, \ldots, \frac{|C_\nu \Delta_\nu(\zeta_0)|}{C_\nu \Delta_\nu(\zeta_0)} \right).$$

Покажем, что все корни многочлена $\omega(z, \tau^0)$, кроме ζ_0, лежат на окружности $|z| < R$. Обозначим $\alpha_j = |C_j \Delta_j(\zeta_0)|$, $j = 2, \ldots, \nu$. Тогда легко видеть, что

$$\omega(z, \tau^0) = -e^{i\varphi} \sum_{j=2}^{\nu} \alpha_j \left(\frac{\Delta_j(z)}{\Delta_j(\zeta_0)} - \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(\zeta_0)} \right).$$

Кроме того,

$$\frac{\Delta_j(z)}{\Delta_j(\zeta_0)} - \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(\zeta_0)} = \frac{\Delta(z)}{\Delta(\zeta_0)} \frac{(z_1 - z_j)(z - \zeta_0)}{(z - z_j)(z - z_1)}.$$

Таким образом,

$$\omega(z, \tau^0) = -e^{i\varphi} \frac{\Delta(z)}{\Delta(\zeta_0)} \frac{(z - \zeta_0)}{(z - z_1)} \sum_{j=2}^{\nu} \alpha_j \frac{z_1 - z_j}{z - z_j}.$$

Так как $\omega(z, \tau^0)$ и $\Delta(z)$ взаимно просты, то корнями $\omega(z, \tau^0)$ являются ζ_0 и нули рациональной функции

$$f(z) = \sum_{j=2}^{\nu} \alpha_j \frac{z_1 - z_j}{z - z_j}. \tag{1}$$

По лемме 2 все нули функции $f(z)$ лежат на окружности $|z| = R$. Таким образом, все нули многочлена $\omega(z, \tau^0)$ лежат в области $|z| \geq R$. Теорема доказана. ■

Непосредственными следствиями этой теоремы являются

Следствие 1. *Если для аргументов доминирующих полюсов справедливо условие:* $\Theta_0 = 1$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$ *линейно независимы над полем рациональных чисел* $\mathbb{Q}$*, то существует подпоследовательность* $\pi_{n,m}(z)$*, равномерно сходящаяся при* $n \to \infty$ *к* $a(z)$ *на компактах, принадлежащих* D_m *и не содержащих полюсов* $a(z)$*.* ■

Следствие 2. *Если для аргументов доминирующих полюсов справедливо условие:* $\Theta_0 = 1$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_{\nu-1}$ *линейно независимы, а* Θ_ν *– рациональное число, то существует подпоследовательность* $\pi_{n,m}(z)$*, равномерно сходящаяся при* $n \to \infty$ *к* $a(z)$ *на компактах, принадлежащих* D_m *и не содержащих полюсов* $a(z)$*.* ■

Заключение

Для случая, когда радиусы m-мероморфности функции $a(z)$ удовлетворяют условию $R_m < R_{m+1}$, получены достаточные условия существования сходящихся подпоследовательностей m-ой строки таблицы Паде для $a(z)$. В частности, сходящиеся подпоследовательности существуют, если число ν доминирующих полюсов равно 2. Если $\nu > 2$, то достаточным условием является линейная независимость аргументов $\Theta_1, \ldots, \Theta_\nu$ доминирующих полюсов по модулю $\mathbb{Z}$ над полем рациональных чисел.

Список литературы

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде // Матем. сб. – 1983. – Т. 120(162), N 4. – С. 540–545.
3. Адуков В.М. О равномерной сходимости подпоследовательностей $(\lambda - 1)$-й строки таблицы Паде // Известия Челябинского научного центра. – 2001. – Вып. 1. – С. 3–7.
4. Адуков В.М. О геометрии множества предельных точек полюсов $(\lambda - 1)$-й строки таблицы Паде // Известия Челябинского научного центра. – 2001. – Вып. 1. – С. 8–11.