Известия Челябинского научного центра, вып. 1 (22), 2004

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ «СЛАБО ГЛАДКОГО» РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

В.П. Танана, Я.М. Севастьянов
e–mail: tanana@math.cgu.chel.su

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 17 декабря 2003 г.

Введено понятие «слабо гладкого» решения линейного операторного уравнения первого рода и построен асимптотически оптимальный алгоритм для его определения.

1. Постановка задачи

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, а A — линейный вполне непрерывный самосопряженный и положительный оператор, отображающий H в H, такой, что $\|A\|<1$.

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au=f\,; \qquad u,\, f\in H\,. \tag{1}$$

Предположим, что при $f=f_0$ существует точное решение $u_0\in H$ уравнения (1), но вместо f_0 известны некоторое приближение $f_\delta\in H$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что $\|f_\delta-f_0\|\le\delta$.

Требуется по $(f_\delta,\,\delta)$ построить приближенное решение u_δ уравнения (1) в некотором смысле наиболее близкое к точному.

Точное решение u_0 уравнения (1) будем называть «слабо гладким», если оно принадлежит множеству значений $R(B_q)$ оператора B_q такого, что $B=g_q(A)$, где

$$g_q(\lambda)=\ln^{-q}\frac{1}{\lambda}\,; \quad q>0\,. \tag{2}$$

2. Метод регуляризации

Для решения поставленной задачи используем метод регуляризации, предложенный в [1].

Для этого уравнение (1) представим в виде обратной задачи Коши для дифференциально–операторного уравнения

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=Cu(t)\,, \tag{3}$$

где $u(0)=u\in H$, а $u(1)=f\in H$, $0\le t\le 1$.

Оператор C в формуле (3) является функцией оператора A и, следовательно, $C\bar{e}_n=\mu_n\bar{e}_n$, а $\mu_n=\ln\lambda_n$, где λ_n и $\bar{e}_n$ — собственные значения и собственные векторы оператора A.

Для регуляризации задачи (3), следуя [1], сведем ее к следующей

$$\frac{du(t)}{dt} = Cu(t) + \alpha A^{-1}u(t), \quad u(1) = f, \ \alpha > 0. \tag{4}$$

Решая задачу (4), получаем, что

$$u^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\alpha}{\lambda_n}} f_n \bar{e}_n , \tag{5}$$

где $f_n = (f, \bar{e}_n)$.

Таким образом, задача (4) порождает регуляризующее семейство операторов $\{T_{\alpha}: \ \alpha > 0\}$, определяемое формулой (5).

Параметр регуляризации α выберем из условия

$$\left\| Au_{\delta}^{\alpha} - f_{\delta} \right\| = 3\sqrt{\delta}, \tag{6}$$

где $u_{\delta}^{\alpha} = T_{\alpha} f_{\delta}$.

Лемма 1. Если $\|f_{\delta}\| > 3\sqrt{\delta}$, то существует единственное решение $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ уравнения (6).

3. Оценка погрешности рассматриваемого метода регуляризации

Следуя работе [2], методом решения поставленной задачи будем называть отображение P с областью определения $D(P) = H$ и множеством значений $R(P) \subset H$, а его количественную характеристику точности $\Delta_q(P)$ определим формулой

$$\Delta_q(P) = \sup_{u_0,\ f_{\delta}} \left\{ \|u_0 - Pf_{\delta}\| : u_0 \in M_r^q, \ \ \|f_{\delta} - Au_0\| \le \delta \right\}, \tag{7}$$

где $M_r^q = B_q \bar{S}_r$.

Метод P_{opt} будем называть оптимальным на классе M_r^q, если

$$\Delta_q(P_{opt}) = \Delta_{opt},$$

где $\Delta_{opt} = \inf\left\{\Delta_q(P): \ P \in P(H, H)\right\}$, а $P(H, H)$ — множество всех методов.

В работе [3] установлено, что

$$\Delta_{opt} \ge \omega_q(\delta, r), \tag{8}$$

где $\omega_q(\delta, r) = \sup\left\{ \|u\| : u \in M_r^q, \ \ \|Au\| \le \delta \right\}$.

Лемма 2. Пусть $u_0 \in M_r^q$, а $\|f_{\delta}\| > 3\sqrt{\delta}$. Тогда существует число $l > 0$ такое, что

$$\left\| u_{\delta}^{\bar{\alpha}(\delta)} - u_0 \right\| \le l\,\omega_q(\delta, r). \tag{9}$$

Теорема 1. При любых значениях параметров $q > 0$ и $r > 0$ метод $T_{\bar{\alpha}(\delta)}$, определяемый формулами (5) и (6), оптимален по порядку на классе M_r^q.

4. О новом подходе к оценке уклонения $\left\| u_\delta^{\bar\alpha(\delta)} - u_0 \right\|$

Для получения реальной оценки уклонения приближенного решения $u_\delta^{\bar\alpha(\delta)}$ от точного u_0 необходимо для каждой пары $(f_\delta,\ \delta)$ выбирать свое значение параметра $\bar q = \bar q(\delta) > 0$, позволяющее минимизировать порядок правой части неравенства (8). Для определения такой зависимости $\bar q = \bar q(\delta)$ необходимо предположить существование числа $q > 0$ такого, что для любого q: $0 < q_1 \le q < q_0$ точное решение u_0 уравнения (1) принадлежит множеству значений $R(B_q)$ оператора B_q, а при $q = q_0$ оно может не принадлежать $R(B_{q_0})$.

Этот факт означает принадлежность u_0 некоторому множеству M допустимых решений такому, что из того, что $u_0 \in M$ следует существование $l_1 > 0$ и

$$|u_n| \ln^{q_0} \frac{1}{\lambda_n} \le l_1 n^{-1/2} \ln^{-1/2} n \tag{10}$$

и существует $\bar u_0 \in M$ такое, что

$$\bar u_n \ln^{q_0} \frac{1}{\lambda_n} = l_1 n^{-1/2} \ln^{-1/2} n\,,$$

где $u_n = (u_0,\ e_n)$, а $\bar u_n = (\bar u_0,\ e_n)$, а λ_n — собственные значения оператора A, удовлетворяющие условию

$$n^{-\gamma_1} \le \lambda_n \le n^{-\gamma_2}\,, \tag{11}$$

где $\gamma_1,\ \gamma_2 > 0$.

Из формул (10) и (11) следует, что для любого $q \in (q_1,\ q_0)$

$$r(q) = \left\| B_q^{-1} \bar u_0 \right\| \sim (q_0 - q)^{-1/2}. \tag{12}$$

Из теоремы 1 и (12) следует, что

$$\Delta_q\left(T_{\bar\alpha(\delta)}\right) \sim (q_0 - q)^{-1/2} \ln^{-q}\left(\frac{1}{\delta\sqrt{q_0 - q}}\right). \tag{13}$$

Обозначим через $\bar q = \bar q(\delta)$ значение q, при котором правая часть соотношения (13) минимальна.

Тогда из (13) следует, что

$$\Delta_{\bar q(\delta)}\left(T_{\bar\alpha(\delta)}\right) \sim \left[\ln\ln\frac{1}{\delta}\right]^{1/2} \ln^{q_0}\frac{1}{\delta}. \tag{14}$$

В заключение заметим, что если собственные значения λ_n оператора A удовлетворяют соотношениям

$$[\underbrace{\ln\ln\ \ldots\ \ln n}_{k}]^{-\gamma_1} \le \lambda_n \le [\underbrace{\ln\ln\ \ldots\ \ln n}_{k}]^{-\gamma_2} \tag{15}$$

либо

$$a_1^{-n} \le \lambda_n \le a_2^{-n}\,, \tag{16}$$

где $\gamma_1, \gamma_2,\ a_1, a_2 > 0$ — некоторые числа, то при подходящим образом выбранном множестве M допустимых решений может доказать справедливость формулы (14) и в этих случаях.

Заключение

Таким образом, в работе введено понятие «слабо гладкого» решения линейного операторного уравнения первого рода и построен оптимальный алгоритм для его определения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 01–01–00300.

Список литературы

1. Танана В.П., Табаринцева Е.В. Об одном новом подходе к регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. РАН, 1994. Т. 335. № 5. С. 565—567.
2. Танана В.П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения // Изв. вузов. Математика, 1977. № 11. С. 106—112.
3. Страхов В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравн., 1970. Т. 6. № 8. С. 1490—1495.