Известия Челябинского научного центра, вып. 2 (23), 2004

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 681.5

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ МИНИМАКСНО — СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

С.Б. Пельцвергер
e–mail: sbp@gsw.edu

Юго–Западный государственный университет штата Джорджия, США

Статья поступила 18 мая 2004 г.

Введение

В настоящее время математические методы находят все более широкое применение в моделировании динамических систем. Актуальность проблемы оценивания объясняется тем, что математические модели позволяют описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный анализ, прогнозировать результаты будущих наблюдений. В работе описаны быстрые алгоритмы полиэдральной аппроксимации информационных множеств и построения минимаксных оценок вектора состояния динамической системы функционирующих в присутствии возмущений как вероятностного, так и неопределенного характера. Наиболее адекватно реальные процессы в динамических системах описывает минимаксно — стохастический подход, который предусматривает построение информационного множеств и нахождение оценки вектора состояния принадлежащего этому множеству. В работе используется геометрический подход к нахождению информационных множеств. Работа продолжает исследования [1…3].

1. Постановка задачи

Пусть в линейном приближении движения системы описываются линейной разностной системой уравнений

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k + C_k \xi_k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots. \tag{1}$$

В моменты времени k осуществляется измерение r — векторного параметра, связанного с вектором фазовых координат $x_k \in R^n$ линейным соотношением

$$y_{k+1} = G_{k+1} x_{k+1} + H_{k+1} v_{k+1} + \eta_{k+1}, \tag{2}$$

где ξ_k, η_{k+1} независимые гауссовские последовательности, причем

$$M\xi_k = 0, \quad M\eta_{k+1} = 0, \quad \mathrm{cov}\{\xi_k\} = Q_k,\ \mathrm{cov}\{\eta_{k+1}\} = R_{k+1},$$

где заданные $m \times m$ и $r \times r$ матрицы Q_k и R_{k+1} положительно определенные матрицы ковариаций. Детерминированные воздействия $w_k \in W_k \subset R^m$ и ошибки $v_k \in V_k \subset R^p$ заранее неизвестны. Матрицы A_k, B_k, C_k, G_{k+1}, H_{k+1} соответствующей размерности и выпуклые множества W_k, V_{k+1} считаются известными.

Начальное состояние $x_0 = x_{co} + x_{no}$ системы (1) будем предполагать гауссовским n — вектором, не зависящим от ξ_k, η_{k+1}, с известной положительно определенной матрицей ковариаций

$\mathrm{cov}(x_{co}, x_{no}) = P_o$, но с неизвестным заранее средним значением $x_{no} = M_{xo} = \breve{x}_0$, $\breve{x}_0 \in X_o$ известный выпуклый компакт.

Таким образом, в уравнениях движения и измерения присутствуют как случайные вектора x_{co}, ξ_k, η_{k+1} статистические характеристики которых полностью известны и неопределенные вектора x_{no}, v_{k+1}, w_k информация о которых исчерпывается заданием областей изменения

$$x_{no} \in X_o,\ w_k \in W_k,\ v_{k+1} \in V_{k+1\cdot 1} \tag{3}$$

Рассмотрим задачу оценивания. Для каждой фиксированной пары последовательностей

$$w_{N-1}\ (.) = \{w_o, ..., w_{N-1}\},\ v_N(.) = \{v_1, ..., v_N\},$$

величины $\overline{\xi}_k = B_k w_k$, $\overline{\eta}_{k+1} = H_{k+1} v_{k+1}$ являются средними значениями гауссовских последовательностей

$$\xi_k^* = B_k w_k + C_k x_k,\ \eta_{k+1}^* = H_{k+1} v_{k+1} + \eta_k\ ,\ k = 0, ..., N-1.$$

Тогда уравнения (1), (2) могут рассматриваться как уравнения с гауссовскими входными воздействиями ξ_k^*, η_{k+1}^*, и гауссовским начальным вектором x_o.

Пусть реализовалась последовательность наблюдений $y_N(.) = \{y_1, ..., y_N\}$. Если бы величина $\xi_N(.)$ была задана, то наилучшей оценкой для параметров распределения вектора x_N, было бы условное математическое ожидание

$$M\frac{x_N}{y_N(.)} = x_N..$$

При этом для апостериорной матрицы коварияций можно записать соответствующее рекуррентное уравнение типа Риккати

$$P_N = M\left((x_N - \hat{x}_N)\frac{(xN - \hat{x}_N)'}{y_N(.)} \right) = x_N .$$

Рассмотрев все возможные значения величины $\xi_N(.)$ получим множество оценок $\hat{x}_N$, которое вместе с матрицей P является неулучшаемой информацией о векторе $\hat{x}_N$, которую только можно извлечь на основе обработки измеренного сигнала $y_N(.)$. Получение точечной оценки теперь означает просто выбор точки из указанного множества, являющейся наилучшей в смысле некоторого критерия.

Рассмотрим в пространстве $R^n \times R^{nm} \times R^{pn}$ следующее множество

$$D_N = \{?_N(\,.\,):\ \bar{x}_0 \in X_0,\ w_k \in W_k,\ v_{k+1} \in V_{k+1},\ k = 0, ..., N-1\}\ ,$$

тогда выбирая в качестве функции потерь $\gamma(x) = x'x = \mid x \mid^2$ приходим к следующей задаче минимаксно–стохастической фильтрации.

Необходимо по известной реализации наблюдений $y_k(.)$ найти для каждого $N \geq 1$ оценку $x_N^* = x_N^*(y_N(.))$ удовлетворяющую условию

$$\max_{\xi_N(.)\in D_N} M\left[\frac{\| x_N - x_N^* \|^2}{y_N(.)}, \xi_N(.)\right] = \min_{z\in R^n} = \max_{\xi_N^N(.)\in D_N} M\left[\frac{\| x_N - z \|^2}{y_N(.)}, \xi_N(.)\right] = \varepsilon_N^2, \tag{4}$$

Символ $M[.\ /y_N(.),\ x_N(.)]$ означает оператор условного математического ожидания, взятый при фиксированном значении $\xi_N(.)$.

2. Определяющие соотношения в задаче фильтрации

Пусть за N шагов реализовалась последовательность наблюдений $y_N(.)$. Фиксируя величину $\xi_N(.)\in D_N$, получим задачу нахождения вектора $\hat{x}_N$ из условия

$$\sigma_N^2 = M\left[\frac{\|x_N-\hat{x}_N\|^2}{y_N(.)},\ \xi_N(.)\right] = \min_{z\in R^n} M\left[\frac{\|x_N-z\|^2}{y_N(.)},\ \xi_N(.)\right]. \tag{5}$$

где $\hat{x}_N$ есть решение известной задачи оптимальной среднеквадратичной фильтрации, подробно исследованной во многих работах, начиная с работы [4].

Это решение доставляет вектор $\hat{x}_N = M\left[x_N/y_N(.),\ \xi_N(.)\right]$, причем

$$\sigma_N^2 = Tr[P_N],$$

где $P_N = M\left[(x_N-\hat{x}_N)(x_N-\hat{x}_N)'/y_N(.)\right] = x_N$.

При этом вычисление пары $\left\{\hat{x}_N, P_N\right\}$ образующей достаточную статистику апостериорного распределения, может осуществляться при фиксированном $\xi_N(.)$ в силу рекуррентной процедуры

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \bar{x}_k + \Lambda\left(y_k - G_k\bar{x}_k - H_k v_k\right),\\ \bar{x}_k &= A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}w_{k-1},\end{aligned} \tag{6}$$

$$P_k = M_k - M_k G_k'\left(G_k M_k G_k' + R_k\right)^{-1} G_k M_k'. \tag{7}$$

$$M_k = A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}' + C_{k-1}Q_{k-1}C_{k-1}',\ k=1, 2, ...,$$

$$\Lambda_k = P_k\, G_k' R_k^{-1},$$

где $\hat{x}_0$, P_0 заданы. При этом в силу линейности системы (1), (2) и гауссовского характера процессов ξ_k, η_{k+1} апостериорные распределения x_k также будут гауссовскими. Существенным является также то, что матрицы P_k, $k=1, ..., N$ не будут зависеть от выбора величины $\xi_N(.)$. Вводя обозначение

$$X_N = \left\{\hat{x}_N :\ \xi_N(.)\in \bar{D}_N\right\}$$

и используя преобразование

$$M\left[\frac{\|x_N - z\|^2}{y_N(.)}, \xi_N(.)\right] = \|\hat{x}_N - z\| + M\left[\frac{\|x_N-\hat{x}_N\|^2}{y_N(.)}, \xi_N(.)\right].$$

При $\xi_N(.)\in\bar{D}_N$ по заданной реализации $y_N(.)$ найти для каждого $N\ge 1$ оценку $x_N^*(.)$, удовлетворяющую соотношению

$$\varepsilon_N^2 = \sigma_N^2 + \delta_N^2., \tag{8}$$

где

$$\delta_N^2 = \min_{z\in R^n}\max_{x\in \bar{X}_N}\|x-z\|^2 = \max_{x\in \bar{X}_N}\|x_N - x_N^*\|^2, \tag{9}$$

а величина $\delta_N^2 = Tr\ \ P_N\,\sigma^2_N$ = $Tr\ \ P_N$ не зависит от значения реализовавшегося сигнала $y_N(.)$ и параметра $\xi_N(.)\in D_N$.

Таким образом, решение задачи должно включать описание динамики множеств $X_N = \{\hat{x}_N :\ \xi_N(.)\in\bar{D}_N\}$, которые будем называть информационными множествами [5].

Если (6) непосредственно рассмотреть на множестве значений

$$\hat{x}_{k-1} \in \bar{X}_{k-1},\ v_k \in V_k,\ w_{k-1} \in W_{k-1},$$

то, учитывая известные факты из выпуклого анализа [6], получим что оценки $\bar{X}_{ik}$ множества $\bar{X}_k$ удовлетворяют, начиная с известного $\bar{X}_0$, соотношениям для множественно–множественных отображений

$$\bar{X}_{1k+1} = \bar{A}_k \bar{X}_k + \bar{B}_k W_k + \Lambda_{k+1}\left(y_{k+1} - H_{k+1} V_{k+1}\right), \tag{11}$$

$$\bar{X}_{2k+1} = \left(I - \Lambda_{k+1} G_{k+1}\right) X_{k+1/k} + \Lambda_{k+1} Y_{k+1},$$

$$\bar{X}_{3k+1} = \bar{X}_{2k+1} \cap X[y_{k+1}],$$

где множества $X_{k/k+1}$, Y_{k+1}, $X[y_{k+1}]$ определяются выражениями

$$X_{k+1/k} = A_{k+1}\bar{X}_{ik} + B_k W_k,$$

$$Y_k = \left(y_{k+1} - H_{k+1} V_{k+1}\right) \cap G_{k+1} X_{k+1/k}, \tag{12}$$

$$X[y_{k+1}] = \{x : G_{k+1}x + H_{k+1}v = y_{k+1}, v_{k+1} \in V_{k+1}\},$$

Для чебышевских радиусов множеств $\bar{X}_{ik}$ имеет место неравенство

$$d_{i+1\,k} \le d_{i\,k}$$

Построив одну из оценок $\bar{X}_{ik}$ информационного множества $\bar{X}_k$ из решения минимаксной задачи (9) найдем минимаксную оценку $x^*_{i\,k}$ вектора фазовых координат x_k.

Сумма множеств в (11) и (12) является суммой по Минковскому. Самой точной является третья оценка, которая определяется как пересечение множества прогноза и множества неопределённости пришедшего замера. Вторая и третья оценки являются более точными, и не могут быть вычислены только при поступлении измерений так как для их нахождения необходимо множество неопределенности пришедшего замера. Отсюда возникает необходимость в быстрых алгоритмах нахождения суммы по Минковскому и пересечения множеств. Минимаксно–стохастическое сглаживание, целесообразно применять для обработки экспериментальных данных после выполнения эксперимента, когда существует вся реализация измерений y_N. При построении сглаженной оценки возникает необходимость построения геометрической разности множеств.

3. Операции над множествами в задачах оценивания

Построение информационных множеств в алгоритмах оценивания предполагает выполнение следующих операций: нахождение суммы множеств по Минковскому, нахождение геометрической разности множеств, нахождение пересечения множеств и нахождения чебышевского центра множеств. Для выполнения этих операций множества должны быть описаны. В задачах оценивания и управления в условиях неопределенности известно применение описания множеств достижимости, эллипсоидами и многогранниками [8, 9]. Многогранники позволяют обеспечить более точную аппроксимацию множеств по сравнению эллипсоидами т.к. пересечение эллипсоидов не является эллипсоидом. Отметим известный недостаток аппроксимации многогранниками. Очевидно, что при достаточно большей размерности фазового пространства число вершин многогранника должно быть весьма большим. Кроме того, с ростом k у множества $\bar{X}_k$ (11) число угловых точек растет. Поэтому актуальной становится задача построения внешнего аппроксимирующего многогранника для $\bar{X}_k$ с меньшим числом вершин.

Согласно теореме McMullena [7] об оценке сверху количества граней многогранника с m вершинами, например для пространства размерности 5 для 30 вершин имеем 702 грани. Отсюда можно сделать вывод, что для пространств большой размерности алгоритмы, работающие только с вершинами многогранников, будут более эффективны, чем алгоритмы, работающие с представлением многогранника в виде пересечения полупространств.

Сумма по Минковскому двух многогранников, заданных вершинами может быть найдена как выпуклая оболочка множества точек полученного путем n_a сдвигов многогранника B на вектор a_i

$$A + B = \mathrm{conv}\left\{a_i + b_j : i = 1, \ldots, n_a,\ j = 1, \ldots, n_b\right\}, \tag{13}$$

где a_i и b_j соответственно вершины многогранников A и B

Построение геометрической разности двух многогранников B и A

$$B \underline{*} A = \bigcap_{i=1,\ldots,n_a} (B - a_i) \tag{14}$$

сводится к нахождению пересечений многогранников B' полученных путем n_a сдвигов множества B на вектор $-a_i$.

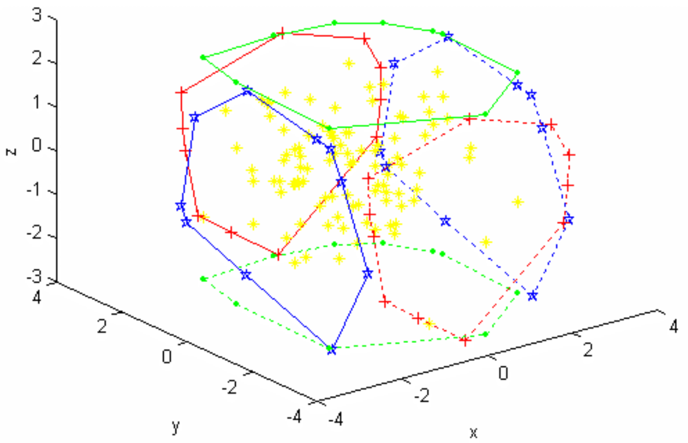
Все известные алгоритмы, строящие пересечение многогранников требуют построения системы неравенств, что приводит к необходимости, сначала имея множество вершин многогранника найти его грани, а затем сделать обратное преобразование так как в уравнениях фильтрации используются вершины многогранников.

Учитывая описанное ранее соотношение между количеством вершин и количеством полуплоскостей, предлагается новый подход рассматривать многогранники как коллекцию проекций на плоскости, что позволит избежать двойного преобразования и существенно снизить объем вычислений.

Рассмотрим многогранник X заданный множеством вершин:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \vdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \vdots & x_{2m} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \vdots & x_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \vdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad X \in R^n \quad [n \times m]. \tag{15}$$

Аппроксимируем сверху исходный многогранник X многогранником $\tilde{X}$, проецируя вершины X на плоскости, параллельные координатным плоскостям, проведенным через минимальную и максимальную точку по каждой координате (рис.) то есть на грани аппроксимирующего его сверху гиперпараллелограмма.



Аппроксимация многогранника проекциями на плоскости параллельные координатным плоскостям

Для пространства размерности n количество проекций на плоскости будет находиться как выборка из n по 2

$$R^2 = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{16}$$

где среднее количество точек в проекции после построения выпуклой оболочки qm/n Величины коэффициента q для пространств разной размерности при $X = \mathrm{conv}\{x_i\}$, $i = \overline{1,\ 100 \times n \times 2^n}$ приведены в табл.. Данные получены путем усреднения результатов 1000 экспериментов для каждой размерности.

n	3	4	5	6	7	8
q	1,54	1,37	1,25	1,17	0,83	0,73

Для каждой проекции имеем:

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11}^{ij} & x_{12}^{ij} & \cdots & x_{1m_{ij}}^{ij} \\ x_{21}^{ij} & x_{22}^{ij} & \cdots & x_{2m_{ij}}^{ij} \end{bmatrix},$$

где m_{ij} — количество вершин в проекции на плоскость ij. Образуем матрицу $X_{\min\max}$ для хранения минимальных и максимальных координат по каждой оси:

$$X_{\min\max} = \begin{bmatrix} x_1^{\min} & x_1^{\max} \\ x_2^{\min} & x_2^{\max} \\ \cdots & \cdots \\ x_n^{\min} & x_n^{\max} \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (16), количество памяти необходимое для хранения многогранника $\tilde{X}$, представленного как совокупность проекций — $\frac{(n-1)qm}{2} + 2n$, что для пространств больших размерностей значительно меньше, чем nm для исходного многогранника X из (15).

Нахождение суммы по Минковскому двух многогранников сведется к построению выпуклой оболочки множества точек из (13) для каждой плоскости. Доказано, что невозможно построить алгоритм нахождения точной выпуклой оболочки эффективнее, чем $m\log m$, Однако в нашей задаче из–за ошибок выбора и необходимости вести вычисления в реальном времени будет достаточно найти аппроксимацию выпуклой оболочки. Основным достоинством этого подхода будет эффективность и скорость нахождения результата. Построение выпуклой оболочки алгоритм Бентли — Фауст — Препарата [10] имеет вычислительную сложность $O(m)$, где m — количество точек. Любая точка не находящаяся внутри найденной аппроксимации выпуклой оболочки находится на расстоянии $(x_{\max} - x_{\min})/K$ от нее, где K — это количество интервалов, что позволяет регулировать точность построения в соответствии с имеющимися вычислительными ресурсами. Результатом работы этого алгоритма будет являться упорядоченная по часовой стрелке последовательность вершин, которая и будет использоваться в построении пересечения.

Для нахождения пересечения применим алгоритм O'Rourke [11], который основан на последовательном чередующемся обходе многоугольников, решения о том какой многоугольник обходить на следующем шаге принимается на основе знака ориентированной площади треугольника, содержащего две вершины ребра одного многоугольника и очередной вершины другого многоугольника. Вычислительная сложность $O(m)$ для каждой плоскости.

Для нахождения минимаксной оценки фазового вектора воспользуемся алгоритмом Фишера [12] $O(m)$. Идея алгоритма заключается в построении сферы любого диаметра, содержащей все точки информационного множества, а затем попытки уменьшить радиус сферы, не нарушив ограничений (4). Вычислительная сложность алгоритма линейно зависит от количества точек. В основе метода лежат два принципа:

Центр должен принадлежать выпуклой оболочке построенной на вершинах, принадлежащих поверхности сферы $a* \in \operatorname{conv}\{B\}$, и коэффициенты этих точек в выпуклой комбинации должны быть меньше S

$$a^* = \sum_{b \in B} \lambda_b b, \quad \sum_{b \in B} \lambda_b = 1, \quad \forall b \in B, \quad \lambda_b \geq 0 \Rightarrow \lambda_b \leq 1/2,$$

где все точки из B лежат на поверхности сферы. Если центр окружности не является выпуклой комбинацией вершин лежащих на поверхности сферы, то вершину с отрицательным коэффициентом выпускаем из рассмотрения. Центр сферы перемещаем ортогонально плоскости проведенной через оставшиеся вершины, до тех пор, пока поверхности сферы не будет принадлежать очередная точка или точки. Включив эту точку в множество B будем повторять эту процедуру до тех пор, пока очередной шаг оставит без изменений радиус сферы.

Заключение

Использование в алгоритмах построения информационных множеств и минимаксных оценок вектора состояния динамической системы функционирующих в присутствии возмущений как вероятностного, так и неопределенного характера представления многогранников в виде проекций на плоскости аппроксимирующего гипер– параллелепипеда позволяет применять линейные алгоритмы для нахождения результатов для каждой проекции, причем эти вычисления могут вестись параллельно. Вычислительная сложность нахождения суммы по Минковскому, пересечения и геометрической разности множеств для пространства R^n $O(qmn)$.

Полученные алгоритмы по вычислительной сложности сравнимы с алгоритмами, использующими эллипсоиды для описания множеств достижимости в задачах оценивания и управления в условиях неопределенности. Многогранники позволяют обеспечить более точную аппроксимацию множеств по сравнению эллипсоидами [8]. Эффективные алгоритмы аппроксимации, включенные во все операции над множествами, позволяют избегать известных недостатков аппроксимации многогранниками таких как, весьма большое число вершин многогранника при достаточно большей размерности фазового пространства и возрастающее с ростом k число угловых точек множества $\bar{X}_k$.

Список литературы

1. Ширяев В.И., Пельцвергер С.Б. Синтез управления динамическими системами в статистически неопределенных ситуациях // Международная конференция «Актуальные проблемы фундаментальных наук» (СССР, Москва, 28 октября — 3 ноября, 1991 г.): Сб. докл. — М.: Изд–во МГТУ, 1991. Т. 1. С. 86—89.
2. Ширяев В.И., Халили Н.Б. Пельцвергер С.Б. Алгоритмическое обеспечение процессов принятия решения в динамических системах в условиях статистической неопределенности ситуациях // Международная конференция по интервальным и стохастическим методам в науке и технике (Интервал–92) (Москва, 22–26 сентября 1992 г.): Сб. трудов. М.: Т. 1. С. 203—206.
3. Shiryaev, V., Peltsverger, S., Algorithms for Calculation of Information Set in Discrete Systems Under Conditions of Statistical Uncertainty // SCI 2001/ISAS 2001, Orlando, July 22—24, 2001.
4. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Тр. 1 Конгресса ИФАК. — М.: Изд–во АН СССР, 1961. С. 521—547.
5. Кац И.Я. Асимптотические свойства информационных множеств в задаче минимаксно–стохастической фильтрации // В кн.: Эволюционные системы в задачах оценивания. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 31—37.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. 472 с.
7. McMullen. P. The maximum number of faces of a convex polytope // Mathematika. 1970. № XVII. P. 179—184.

8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. 319 с.
9. Красовский А.А. Общие решения задачи оптимизации управления при неклассическом функционале // ДАН СССР, 1985. Т. 284, N 4. С. 808—811.
10. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. — М.: Мир, 1989. 478 с.
11. O'Rourke, J. Computational Geometry in C. New York: Cambridge University Press, 1995. 376 p.
12. Fischer K., Gärtner B., Kutz M. Fast Smallest–Enclosing–Ball Computation in High Dimensions // Proceedings of the 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), 2003. — Budapest, 2003. P. 630—641.