
МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.21

ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

И.С. Левицкая
e-mail: lis@cspi.urc.ru

Челябинский государственный педагогический университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 6 мая 2004 г.

Введение

Мы намерены исследовать устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x}(t) = -ax(t - \tau_1) - bx(t - \tau_2), \quad (1)$$

где $a, b, \tau_1, \tau_2 \in R, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$. Числа τ_1, τ_2 мы называем запаздываниями. Уравнение (1) является результатом линеаризации логистической модели динамики популяции с запаздываниями в реакции окружающей среды [1]

$$\dot{y}(t) = y(t) \left(1 - \frac{1}{N} (a y(t - \tau_1) + b y(t - \tau_2)) \right).$$

Задача сводится к проблеме расположения корней характеристического уравнения

$$p + a e^{-p\tau_1} + b e^{-p\tau_2} = 0. \quad (2)$$

Она решается с помощью принципа аргумента и метода D -разбиений [3].

В [1] решается проблема устойчивости уравнения (1) при $a > 0, b > 0$, и утверждается, что условие $a\tau_1 + b\tau_2 < 1$ является достаточным, а $a\tau_1 + b\tau_2 < \pi/2$ необходимым для того, чтобы все корни уравнения (2) имели отрицательные вещественные части. Однако в [2] доказано, что условие $a\tau_1 + b\tau_2 < \pi/2$ достаточно для устойчивости дифференциального уравнения (1) при $a > 0, b > 0$. Кроме того, в [2] показано, что никакое ограничение сверху величины $a\tau_1 + b\tau_2$ не является необходимым для устойчивости уравнения (1). Тем самым в [2] показана ошибочность утверждения работы [1] о необходимом условии устойчивости уравнения (1).

Наша задача состоит в том, чтобы полностью описать область устойчивости уравнения (1).

1. Возможные граничные точки области устойчивости

Уравнение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда для всякого корня p характеристического уравнения (2) имеет место $\operatorname{Re} p < 0$. Введем обозначение

$$\varphi(p) = p + a e^{-p\tau_1} + b e^{-p\tau_2}. \quad (3)$$

В соответствии с методом D -разбиения [3] необходимым условием принадлежности точки (a, b) границе области устойчивости является существование такого $\omega \in \mathbb{R}$, что $\varphi(-i\omega) = 0$. Полагая $p = -i\omega$ в (3), перепишем уравнение $\varphi(-i\omega) = 0$ в виде

$$\begin{aligned} a \cos \tau_1 \omega + b \cos \tau_2 \omega &= 0, \\ a \sin \tau_1 \omega + b \sin \tau_2 \omega &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует, что граничными точками области устойчивости в плоскости (a, b) могут быть следующие точки:

α) Точки кривой

$$a = \frac{-\omega \cos \tau_2 \omega}{\sin(\tau_2 - \tau_1) \omega}, \quad b = \frac{\omega \cos \tau_1 \omega}{\sin(\tau_2 - \tau_1) \omega}. \quad (5)$$

Эти точки получаются из (4), если система (4) невырождена.

β) Точки прямой

$$a + b = 0. \quad (6)$$

Они получаются, если положить в (4) $\omega = 0$.

γ) Точки прямой

$$(-1)^k a + (-1)^m b = \frac{\pi(2k+1)}{2\tau_1}. \quad (7)$$

Эти точки могут появиться только при $\tau_1/\tau_2 = (2k+1)/(2m-1)$, где $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если в (4) положить $\omega = (2k+1)\pi/2\tau_1$.

Других граничных точек области устойчивости нет.

2. Методика численных и графических экспериментов

Коротко опишем наши методы исследования. Разобьем пространство коэффициентов на области линиями, точкам которых соответствуют квазиполиномы, имеющие хотя бы один нуль на мнимой оси. Такое разбиение называется D -разбиением. Далее выделяем в D -разбиении область, которой соответствуют характеристические квазиполиномы, не имеющие ни одного корня с положительной действительной частью. Для выделения такой области, если она связна, достаточно убедиться, что хотя бы одна ее точка соответствует квазиполиному, все нули которого имеют отрицательную действительную часть. Воспользуемся принципом аргумента. Пусть p движется по контуру K_R комплексной плоскости, состоящему из полуокружности $C_R: p = Re^{i\omega}$, $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$ и отрезка $I_R: p = -i\omega$, $-R \leq \omega \leq R$. По принципу аргумента для устойчивости нулевого решения уравнения (1) достаточно показать, что $\Delta \text{Arg} \varphi(p) = 0$ при движении p по K_R при достаточно больших R . Это будет означать отсутствие корней $\varphi(p)$ в правой полуплоскости. Сканируя всю плоскость (a, b) , мы, согласно принципу аргумента, отыскивали ту область, в которой $\Delta \text{Arg} \varphi(p) = -\pi$ при движении p по отрезку I_∞ .

3. Области устойчивости при $\tau_2 = 1$

Посредством численных и графических экспериментов мы построили области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) , полагая большее запаздывание τ_2 равным 1 и считая, что $0 < \tau_1 < 1$. В дальнейшем будет указано, как перейти от $\tau_2 = 1$ к произвольному τ_2 .

Свойство 1. Если $1/3 < \tau_1 < 1$, то границу области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) образуют:

α) кривая (5), где $0 \leq \omega \leq 2\pi/(1+\tau_1)$;

β) отрезок прямой (6), $\frac{-1}{1-\tau_1} \leq a \leq -\frac{2\pi \cos \frac{2\pi}{1+\tau_1}}{(1+\tau_1) \sin \frac{2\pi(1-\tau_1)}{1+\tau_1}}.$

Области устойчивости указаны на рис. 1.

Свойство 2. Если $\tau_1 = 1/3$, то границу области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) образуют:

α) кривая (5), где $0 \leq \omega \leq 3\pi/2$;

β) отрезок прямой (6), где $-3/2 \leq a \leq 3\pi/4$;

γ) отрезок прямой (7), где $k=0, m=1, 3\pi/4 \leq a \leq 9\pi/4$.

Область устойчивости указана на рис. 1.

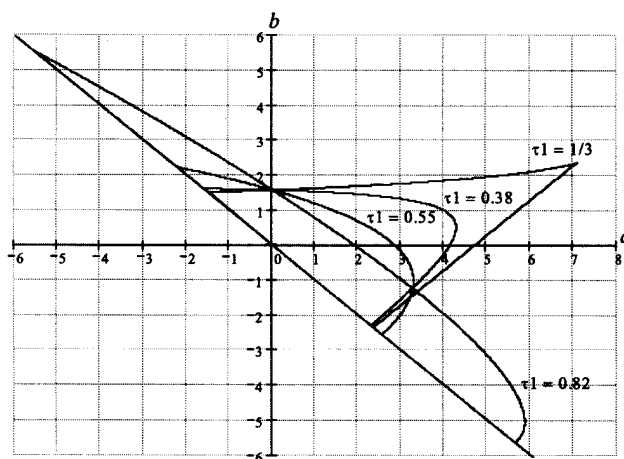


Рис. 1. Области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) для $1/3 \leq \tau_1 < 1$

Свойство 3. Если $1/5 < \tau_1 < 1/3$, то границу области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) образуют:

α1) кривая (5), где $0 \leq \omega \leq A(\tau_1)$;

α2) кривая (5), где $2\pi/(1+\tau_1) \leq \omega \leq B(\tau_1)$;

Функции $A(\tau_1)$ и $B(\tau_1)$ задаются следующей таблицей.

τ_1	1/5	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32
$A(\tau_1)$	2,985	3,041	3,135	3,259	3,431	3,691	4,121
$B(\tau_1)$	7,854	7,703	7,538	7,347	7,113	6,831	6,368

β) отрезок прямой (6), где $\frac{-1}{1-\tau_1} \leq a \leq -\frac{2\pi \cos \frac{2\pi}{1+\tau_1}}{(1+\tau_1) \sin \frac{2\pi(1-\tau_1)}{1+\tau_1}}.$

Области устойчивости указаны на рис. 2.

Свойство 4. Если $\tau_1 = 1/5$, то границу области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) образуют:

α1) кривая (5), где $0 \leq \omega \leq 19\pi/20$;

α2) кривая (5), где $5\pi/3 \leq \omega \leq 5\pi/2$;

β) отрезок прямой (6), где $-5/4 \leq a \leq 5\pi/3\sqrt{3}$;

γ) отрезок прямой (7), где $k=0, m=2, \frac{-19\pi \cos \frac{19\pi}{20}}{20 \sin \frac{19\pi}{25}} \leq a \leq \frac{25\pi}{8}.$

Область устойчивости указана на рис. 2.

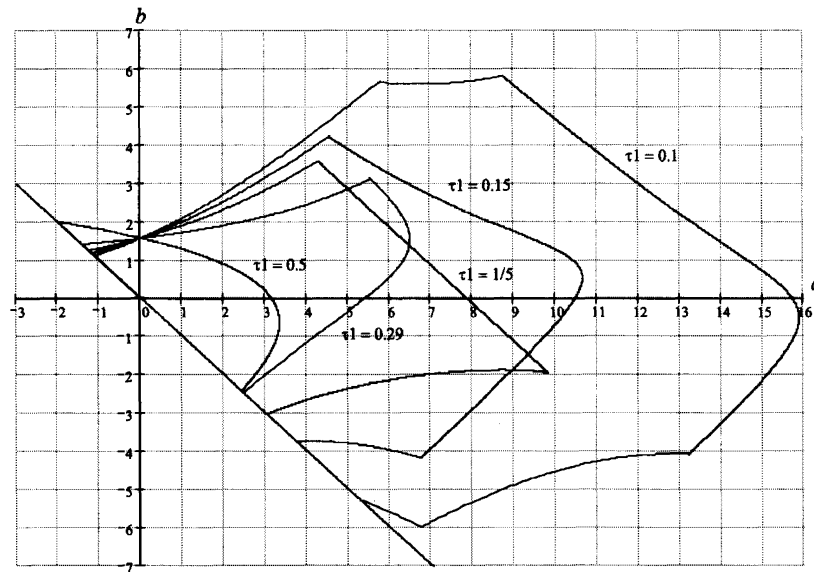


Рис. 2. Области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b)

Вышеизложенные рассуждения можно обобщить следующим образом. Если $1/(2m+1) < \tau_1 < 1/(2m-1)$, $m \in \mathbb{N}$, то область устойчивости уравнения (1) в пространстве параметров (a, b) состоит из прямой $a + b = 0$ и параметрически заданной кривой (5), для которой нужно подобрать m интервалов изменения ω . Как выяснилось посредством численных экспериментов, из всех прямых вида (7) на границе области устойчивости появляется только прямые вида $a + (-1)^m b = \pi/2\tau_1$, и только при исключительных значениях меньшего запаздывания вида $\tau_1 = 1/(2m+1)$, $m \in \mathbb{N}$.

Для полноты картины процитируем известные результаты [3] об областях устойчивости в двух предельных случаях.

Свойство 5. Если $\tau_1 = 0$, то границу области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) образуют:

- α) кривая (5), где $0 \leq \omega \leq \pi$;
- β) отрезок прямой (6), где $-1 \leq a < \infty$.

Область устойчивости указана на рис. 3.

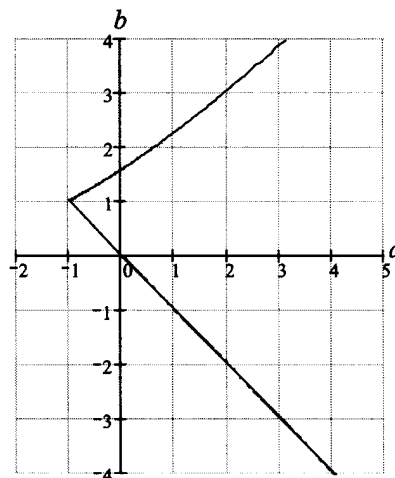


Рис. 3. Область устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) при $\tau_1 = 0$

Свойство 6. Если $\tau_1 = 1$, то границу области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) образуют:

β) прямая (6), где $-\infty < a < \infty$;

γ) прямая (7), где $k = 0, m = 0, -\infty < a < \infty$.

Обозначим посредством $S(\tau_1)$ площадь области устойчивости уравнения (1) в плоскости (a, b) . График функции $S(\tau_1)$ представлен на рис. 4.

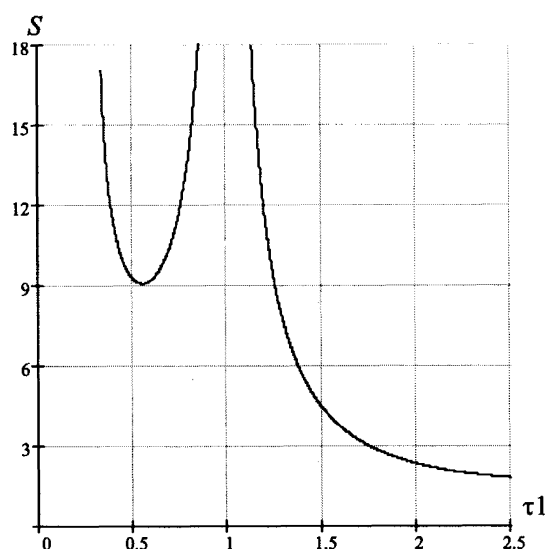


Рис. 4. График функции $S(\tau_1)$

Рисунки 1...4 и численные эксперименты демонстрируют, что при $\tau_2 = 1$ наименьшее значение $S(\tau_1)$ достигается, когда $\tau_1 = 0,5504...$

4. Как перейти от $\tau_2 = 1$ к произвольному τ_2

На рисунках 1...3 указаны области устойчивости при $\tau_2 = 1$ и различных значениях τ_1 .

Покажем, как, используя область устойчивости уравнения (1) при $\tau_2 = 1$, построить область устойчивости этого уравнения для любых значений запаздывания τ_2 . Сделаем в (1) следующую замену: $x(t) = y(t/\tau_2)$, $t/\tau_2 = \theta$, $\tau_1/\tau_2 = \tau$. Тогда получим уравнение $\dot{y}(\theta) = -a\tau_2 y(\theta - \tau) - b\tau_2 y(\theta - 1)$. Очевидно, что область устойчивости этого уравнения получается из области устойчивости уравнения (1) при $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = 1$. Таким образом, для построения области устойчивости уравнения (1) при любых фиксированных запаздываниях τ_1 и τ_2 , можно пользоваться следующим алгоритмом:

1. находим отношение меньшего запаздывания к большему $\tau_1/\tau_2 = \tau$ и строим область устойчивости уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t - \tau) - bx(t - 1)$;

2. сжимаем полученную область устойчивости в τ_2 раз, то есть граничные точки (a, b) на рис. 1...3 переводим в точки $(a/\tau_2, b/\tau_2)$.

Заключения

Наибольшая известная до сих пор гарантированная область устойчивости уравнения (1) определена неравенствами $a > 0, b > 0, a\tau_1 + b\tau_2 < \pi/2$. Наши результаты показывают, что эта известная область является лишь малой частью всей области устойчивости.

Рисунки 1...3 демонстрируют, что области устойчивости уравнения (1) являются звездными: если точка (a, b) лежит в области и $0 < k < 1$, то точка (ka, kb) также лежит в области. Кроме того, границы области устойчивости обладают следующим свойством: если точка (a, b) лежит на границе области устойчивости уравнения (1) с запаздываниями (τ_1, τ_2) , то точка $(a/k, b/k)$ лежит на границе области устойчивости уравнения (1) с запаздываниями $(k\tau_1, k\tau_2)$. Из этого факта и звездности области вытекает универсальная рекомендация для расширения области устойчивости: заменить пару запаздываний (τ_1, τ_2) на запаздывания $(k\tau_1, k\tau_2)$, $0 \leq k < 1$.

Что делать, если пропорциональное уменьшение обоих запаздываний невозможно? Здесь универсальных рекомендаций нет, ибо уменьшение только одного из запаздываний присоединяет к области устойчивости некоторую часть плоскости (a, b) , но одновременно и исключает некоторые подобласти из области устойчивости. Последствия изменений пары запаздываний (τ_1, τ_2) можно просчитать, используя рис. 1...3 и пункт 5 настоящей работы.

Мы выяснили, что при фиксированном большем запаздывании τ_2 наименьшая площадь области устойчивости уравнения (1) имеет место, если $\tau_1 / \tau_2 = 0,5504...$ Отсюда вытекает простая, но небезупречная рекомендация: при настройке запаздываний следует избегать ситуации, когда меньшее запаздывание равно половине большего. Более определенные рекомендации по расширению области устойчивости можно дать, если заведомо известно, что $a > 0$, $b > 0$ и отношение меньшего запаздывания к большему находится между $1/3$ и 1 . В этом случае уменьшение только одного меньшего или одного большего запаздывания безусловно расширяет область устойчивости.

Список литературы

1. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 786—789.
3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.