Известия Челябинского научного центра, вып. 3 (24), 2004

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 621.01

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ НАПРАВЛЯЮЩЕГО ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

Н.Н. Крохмаль
e–mail: longeron@pp.kurgan.ru

Курганский государственный университет, г. Курган, Россия

Статья поступила 8 августа 2004 г.

В общем случае задача синтеза направляющего шарнирного четырехзвенника, состоит в следующем. Имеется некоторая кривая $y = f(x)$, которая может быть задана своим уравнением или таблицей значений ее координат x и y. Требуется определить размеры звеньев и положение механизма, на шатуне которого имеется точка С, описывающая кривую, мало отличающуюся от заданной кривой на некотором участке или на всем протяжении (рис. 1).

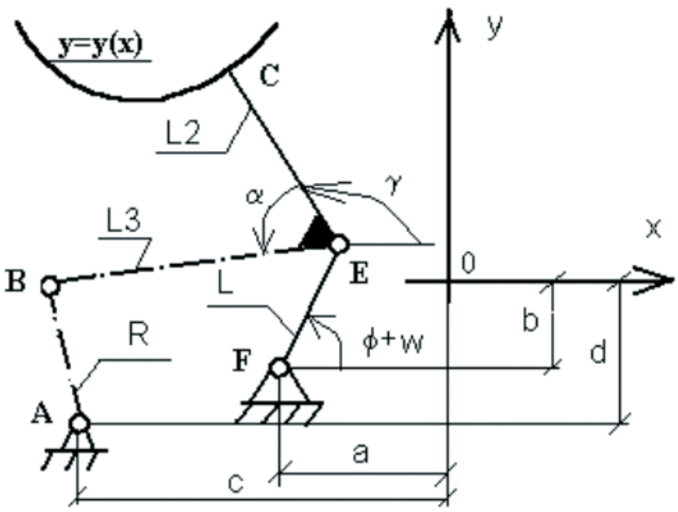

Рис. 1

Подлежат определению следующие параметры: линейные — a, b, c, d, L, $L2$, $L3$, R и углы — W, α.

Механизм состоит из двух диад CEF и EBA, поэтому синтез удобно выполнять последовательно для каждой диады отдельно. Синтез направляющего механизма на основании понятия передаточной функции диады рассмотрен в [1]. В настоящей работе также используется передаточная функция диады, однако методика решения задачи изменена. Вследствие этого алгоритм решения оказывается более эффективным.

Уравнение связи для точек С и Е выглядит следующим образом:

$$(xe_i - xc_i)^2 + (ye_i - yc_i)^2 = L2^2, \tag{1}$$

где i — номер расчетного положения механизма; xc_i, yc_i — координаты точки C, описывающей траекторию $y = f(x)$; координаты точки E выражены равенствами:

$$\begin{aligned} xe_i &= a + L\cos(\phi_i + w) \\ ye_i &= b + L\sin(\phi_i + w) \end{aligned}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и продифференцируем уравнение (1). После некоторых преобразований и группировки членов уравнения будем иметь:

$$\begin{aligned} &a\left(-L\sin(\phi_i + w) - xc_i'\right) + \left(L\cos(\phi_i + w) - xc_i\right)\left(-L\sin(\phi_i + w) - xc_i'\right) + \\ &+ b\left(L\cos(\phi_i + w) - yc_i'\right) + \left(L\sin(\phi_i + w) - yc_i\right)\left(L\cos(\phi_i + w) - yc'\right)_i = \Delta_i, \end{aligned} \tag{3}$$

где Δ_i — величина погрешности уравнения для механизма с определенными параметрами; xc_i', yc_i' — проекции на координатные оси аналога скорости точки C.

Введем функцию:

$$F = \sum_i \Delta_i^2, \tag{4}$$

которая должна иметь минимум при определенных параметрах механизма.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c1_i &= \left(-L\sin(\phi_i + w) - xc_i'\right); \\ c2_i &= \left(L\cos(\phi_i + w) - xc_i\right)\left(-L\sin(\phi_i + w) - xc_i'\right); \\ c3_i &= \left(L\cos(\phi_i + w) - yc_i'\right); \\ c4_i &= \left(L\sin(\phi_i + w) - yc_i\right)\left(L\cos(\phi_i + w) - yc_i'\right), \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений минимум функции (4) достигается при выполнении условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \sum_i \Delta_i \cdot c1_i = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= \sum_i \Delta_i \cdot c3_i = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Полученная система линейных уравнений служит для определения размеров механизма a, b при известных значениях углов ϕ_i, w и длины l.

Построим целевую функцию для оптимизационного синтеза диады CEF, которая является неявной, зависит от двух параметров l и W (рис. 1) и может быть вычислена в следующей последовательности:

1. Задание значений аргументов функции l, W.
2. Выбор числа расчетных положений механизма n.
3. Задание углов ϕ_i и определение координат точки C согласно ее заданного закона движения, соответствующих i–му положению диады.
4. Определение размеров механизма a, b (5).
5. Вычисление значения целевой функции (4), характеризующей отклонение истинного закона движения выходного звена от заданного.

Для определения целевой функции согласно приведенному алгоритму необходимо задать воспроизводимую кривую в параметрическом виде:

$$x = x(\phi), \quad y = y(\phi).$$

Если воспроизводимая кривая задана в табличном виде, то необходимо аппроксимировать табличные данные какой–либо зависимостью.

Рассмотрим пример из [2]. Траектория движения точки С задана координатами семи ее точек:

$$x = \begin{bmatrix} -39,5 \\ -50 \\ -59 \\ -67,5 \\ -76 \\ -83,5 \\ -89 \end{bmatrix}; \qquad y = \begin{bmatrix} 61 \\ 52,5 \\ 48 \\ 47 \\ 47,5 \\ 51 \\ 56,5 \end{bmatrix}.$$

Выполним аппроксимацию табличных значений полиномом второй степени при условии, что угол поворота входного звена EF составляет по условию 66 град. Аппроксимация полиномами второй степени дает следующие зависимости:

$$x = -39,512 - 55,343\phi + 10,497\phi^2,$$

$$y = 60,476 - 45,204\phi + 36,497\cdot^2$$

Полученные аппроксимирующие зависимости позволяют определить проекции аналога скорости точки С, необходимые для вычислений целевой функции.

Далее задача синтеза диады сводится к отысканию минимума целевой функции. Задавая значения аргументов l и W на выбранных интервалах и с определенными шагами, построим карту линий уровня целевой функции (рис. 2). По карте видно, что один из минимумов целевой функции расположен вблизи значений аргументов $l = 25$, $W = 210^\circ$. Уточненные координаты минимума целевой функции равняются $l = 25,608$, $W = 209,958^\circ$. При этом значение целевой функции $f(l, w) = 509,4$, а координаты точки F соответственно равны $a = -45,247$, $b = 155,522$.

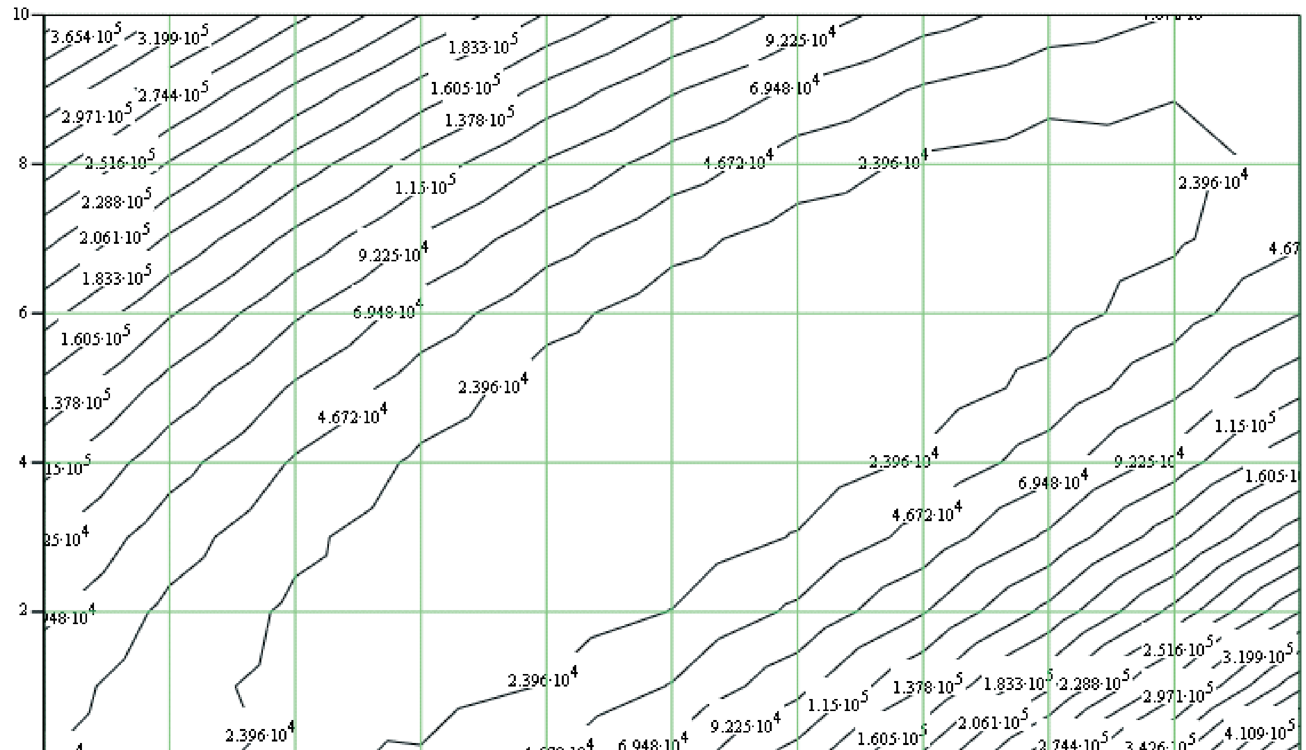

Рис. 2

Определим размер $L2$, как среднее значение длин отрезков CE для расчетных положений механизма.

$$L2 = \frac{\sqrt{\left(a + L\,\cos(\phi_i + w) - xc_i\right)^2 + \left(b + L\,\sin(\phi_i + w) - yc_i\right)^2}}{n}.$$

Точность воспроизведения заданной кривой линии можно оценить относительной величиной:

$$q_i = \frac{\sqrt{(xc_i - x_i)^2 + (yc_i - y_i)^2}}{\sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2}},$$

где xc_i, yc_i — координаты чертящей точки C в i–м положении при рассчитанных размерах звеньев диады; x_i, y_i — координаты заданной траектории для i–го положения механизма.

Результаты расчета погрешности воспроизведения заданной кривой представлены на рис. 3. Таким образом, максимальное отклонение составляет менее 0,007 %.

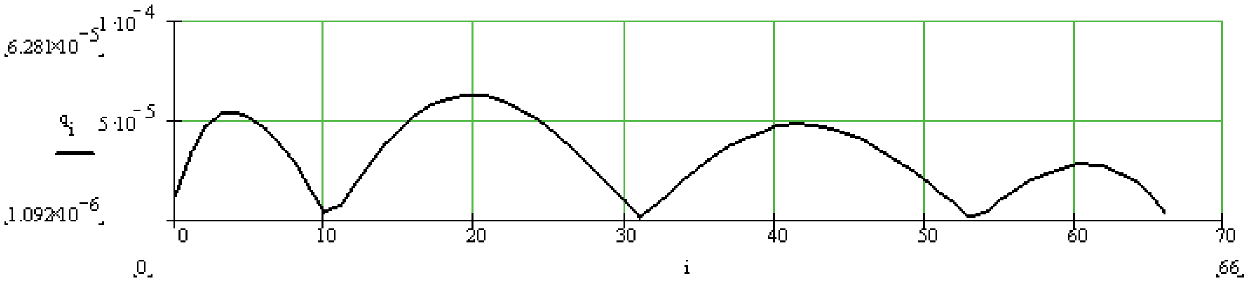

Рис. 3

Теперь необходимо перейти к геометрическому синтезу диады EBA и определить размеры R, $l3$, c, a, α. Условие, которому должны удовлетворять эти размеры — это движение точки B по какой–либо окружности. Естественно, траектория движения точки B должна являться окружностью с определенной степенью точности. В связи с чем запишем уравнение такой окружности в следующем виде [3]

$$x_i^2 + 2mx_i + y_i^2 + 2hy_i + q = \Delta_i, \tag{6}$$

где x_i, y_i — координаты точки B в i–м положении механизма; $m = -xA$, $h = -yA$ — координаты центра окружности (точки A диады); q — коэффициент такой, что $R = \sqrt{m^2 + h^2 - q}$; Δ_i — отклонение (погрешность) левой части равенства (6) от нуля.

Составим функцию

$$\Phi = \sum_i \Delta_i{}^2.$$

значение при выполнении Функция Φ будет иметь минимальное условий

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial m} &= \sum x_i^3 + 2m\sum x_i^2 + \sum y_i^2 \cdot x_i + 2h\sum y_i \cdot x_i + q\sum x_i = 0,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial h} &= \sum x_i^2 \cdot y_i + 2m\sum x_i \cdot y_i + \sum y_i^3 + 2h\sum y_i^2 + q\sum y_i = 0,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial q} &= \sum x_i^2 + 2m\sum x_i + \sum y_i^2 \cdot x_i + 2h\sum y_i + (n+1)q = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Приведенные условия образуют систему линейных уравнений относительно коэффициентов *m*, *h*, q уравнения (6) при известных значениях координат x_i, y_i. В свою очередь координаты точки B нетрудно определить из векторной суммы отрезков a, l, $l3$.

$$\begin{aligned} x_i &= a + l\ \cos(\phi_i + w) + l3\ \cos(\gamma_i + \alpha), \\ y_i &= b + l\ \sin(\phi_i + w) + l3\ \sin(\gamma_i + \alpha). \end{aligned} \qquad (8)$$

В уравнениях (8) имеется два варьируемых параметра $l3$ и α, следовательно, и система (7) также зависит только от этих параметров. В таком случае можно составить неявную целевую функцию для определения размеров звеньев диады. Вычисление целевой функции может быть выполнено последовательным выполнением следующего алгоритма

1. Задание значений аргументов функции $l3$, α.
2. Выбор числа расчетных положений механизма n.
3. Задание углов ϕ_i и определение координат точки B для заданного закона движения, соответствующих *i*–му положению диады (8).
4. Определение длины звеньев диады ABE (7).
5. Вычисление значения целевой — погрешности воспроизведения окружности точкой B

$$f(l3,\ \alpha) = \sum_i \left((-m - x_i)^2 + (-h - y_i)^2 - R^2\right)^2 .$$

Задавая значения аргументов целевой функции l3 и α на выбранных интервалах с определенными шагами, произведем вычисления функции и построим ее карту линий уровня (рис. 4). По карте видно, что один из минимумов целевой функции расположен вблизи значений аргументов $l3 = 10,\ \alpha = 140^\circ$. Уточненные на основании расчета координаты минимума целевой функции равняются $l3 = 10,019,\ \alpha = \ 145,664^\circ$. При этом значение целевой функции $f(l3,\ w) = 0,76$, а длина $R = 36,074$ и координаты точки A соответственно равны $c = -70,906,\ d = 75,172$.

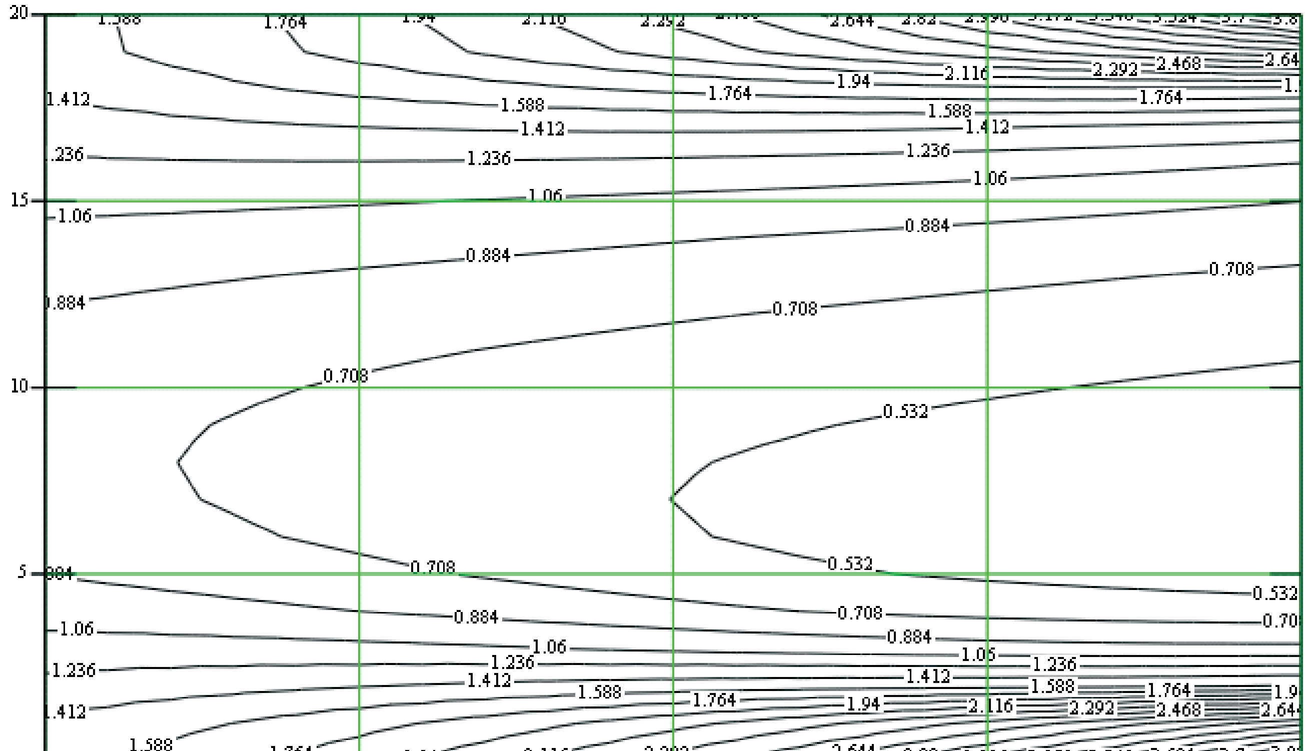

Рис. 4

Заключение

Представленный метод оптимизационного синтеза направляющего механизма, основанный на понятии передаточной функции плоской диады, позволяет выполнить декомпозицию и понизить размерность задачи с 9 до 2, а также выбрать начальные приближения длин звеньев механизма в рамках самого метода. Наработка базы данных для предлагаемого метода позволит выяснить свойства целевых функций различных видов и уточнить особенности алгоритмов их вычисления.

Список литературы

1. Крохмаль Н.Н. Анализ и синтез рычажных механизмов на основе изучения их структурных свойств: Монография. Курган: изд–во Курганского гос. ун–та, 2004. 81 с.
2. Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. — М.: Физматгиз, 1959. 1084 с.
3. Справочник по математике / Под. ред. И.Н. Бронштейна и К.А. Семендяева. — М.:ОГИЗ, 1948. 556 с.