Известия Челябинского научного центра, вып. 4 (26), 2004

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.226

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Е.А. Деркунова
e–mail: derk@math.susu.ac.ru

Южно–Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 20 ноября 2004 г.

Введение

Асимптотические методы играют важную роль при изучении решений дифференциальных уравнений. Они являются незаменимыми в том случае, когда аналитически построить решение не удается (например, для нелинейных задач), или когда вид его неизвестен и представляется более целесообразным построить асимптотику, чем прибегать к численному счету. С другой стороны, при построении асимптотического разложения происходит следующее: мы сводим сложную задачу к более простым, то есть происходит процесс редукции к уравнениям (системам), решение которых легко получить (часто в явном виде) или как–то оценить. При этом асимптотический метод основывается на общей теории дифференциальных и интегральных уравнений и может служить источником имеющих значение для практики задач, от решения которых зависит успешность первого. В качестве примера приведем систему сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных, порождающую систему, о которой речь пойдет ниже.

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}(x,\ t)u + a_{12}(x,\ t)v + f_1(x,\ t,\ \varepsilon), \\ &\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 b(x) \frac{\partial v}{\partial x} = a_{21}(x,\ t)u + a_{22}(x,\ t)v + f_2(x,\ t,\ \varepsilon), \end{aligned} \qquad (x,\ t) \in G, \tag{1}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{t=0} = v\big|_{x=0} = v\big|_{t=0} = 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, область $G = (0 < x \le X) \times (0 < t \le T)$.

Ищется асимптотика погранслойного типа ([1]) как ряд по степеням ε:

$$u(x,\ t,\ \varepsilon) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i(x,\ t) + \Pi_i u(x,\ \tau) + \Omega_i u(x, \theta) + Q_i u(\xi,\ t) + R_i u(\varsigma,\ t) + P_i u(\xi, \tau) + S_i u(\xi,\ \theta) + T_i u(\varsigma,\ \tau)\right) v(x,\ t,\ \varepsilon) = \tag{2}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\bar{v}_i(x,\ t) + \Pi_i v(x,\ \tau) + \Omega_i v(x,\ \theta) + Q_i v(\xi,\ t) + R_i v(\varsigma,\ t) + P_i v(\xi,\ \tau) + S_i v(\xi,\ \theta) + T_i v(\varsigma,\ \tau)\right),$$

где $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$ — регулярная часть, $\Pi_i u$, $\Pi_i v$, $\Omega_i u$, $\Omega_i v$ — пограничные функции, возникающие вблизи стороны $t = 0$ прямоугольника G; $Q_i u$, $Q_i v$, $R_i u$, $R_i v$ — аналогичный погранслой вблизи

$x=0$; P_iu, P_iv, S_iu, S_iv, T_iu, T_iv — угловые пограничные функции, погранслойные переменные: $\tau=t/\varepsilon$, $\theta=t/\varepsilon^2$, $\xi=x/\varepsilon$, $\varsigma=x/\varepsilon^2$.

Ряд (2) подставим в систему и граничное условие (1). Функции a_{ij}, b, f_i разложим в ряды по ε, например, $f_1=f_{10}+\varepsilon f_{11}+\varepsilon^2 f_{12}+\dots$.

Стандартным способом, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях равенств (1), получаем задачи для определения членов асимптотики.

Итак, строятся функции ряда (2) в нулевом порядке, и оказывается, что углового погранслоя при $i=0$ не возникает. При построении функций $\Pi_i u$, $T_i u$, а также $Q_i v$, $S_i v$ получается, что суммы их вносят невязку на сторону $x=0$ и $t=0$ соответственно. Эти невязки призваны устранить функции $P_iu(\xi,\tau)$ и $P_iv(\xi,\tau)$. Задачи для их определения имеют вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P_iu}{\partial\xi}=a_{11}(0,\,0)P_iu+a_{12}(0,\,0)P_iv+p_1^{(i)}(\xi,\,\tau),\\&\frac{\partial P_iv}{\partial\tau}=a_{21}(0,\,0)P_iu+a_{22}(0,\,0)P_iv+p_2^{(i)}(\xi,\,\tau),\end{aligned}\qquad \xi>0,\ \tau>0 \tag{3}$$

$$P_iu(0,\tau)=-\Pi_iu(0,\tau)-T_iu(0,\tau),$$

$$P_iv(\xi,0)=-Q_iv(\xi,0)-S_iv(\xi,0),$$

где $p_1^{(i)}(\xi,\tau)$, $p_2^{(i)}(\xi,\tau)$ выражаются через функции с меньшими индексами, а каждая из функций граничных данных имеет экспоненциальную оценку; например, $\left|\Pi_iu(0,\tau)\right|<Ce^{-\kappa\tau}$, где $C>0$, $\kappa>0$ — некоторые подходящие постоянные.

Заметим, что для доказательства такого типа оценок достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{11}(x,\,t)<0,\ a_{22}(x,\,t)<0\ \text{ и } \Delta(x,\,t)=a_{11}(x,\,t)a_{22}(x,\,t)-a_{12}(x,\,t)a_{21}(x,\,t)>0 \tag{4}$$

(последнее достаточно также для существования решений $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$).

Таким образом, приходим к системе двух уравнений с частными производными, о которых нужно знать, при каких условиях существуют, единственны гладкие решения, удовлетворяющие оценкам типа $\left|P_iu(\xi,\tau)\right|<Ce^{-\kappa(\xi+\tau)}$, к доказательству чего мы и приступаем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}u+a_{12}v,\\&\frac{\partial v}{\partial t}=a_{21}u+a_{22}v,\qquad x>0,\ t>0.\\&u\big|_{x=0}=f(t),\ v\big|_{t=0}=g(x)\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения решаются в неограниченной области $D=(x>0)\times(t>0)$; a_{ij} — постоянные; как и в задаче (3), предполагаем выполненными неравенства

$$\left|f(t)\right|<Ce^{-\kappa t},\quad \left|g(x)\right|<Ce^{-\kappa x} \tag{6}$$

Отметим, что неоднородностей в правых частях уравнений не предусматривается, так как все рассуждения можно провести и с учетом неоднородностей, которые, как в задаче (3), должны иметь экспоненциальную оценку по переменным x и t. Выясним вопрос об условиях, при которых гладкое решение задачи существует, единственно и обладает нужными оценками.

Справедлива следующая

Теорема. При выполнении условий

$$a_{11}+|a_{12}|=-\kappa_1<0\,,\qquad a_{22}+|a_{21}|=-\kappa_2<0 \tag{7}$$

гладкое решение задачи (5) существует, единственно, и имеют место оценки

$$|u(x,\,t)|<Ce^{-\kappa(x+t)},\ \ |v(x,\,t)|<Ce^{-\kappa(x+t)}. \tag{8}$$

2. Доказательство теоремы

Существование. Разрешим каждое уравнение системы (5) относительно функции в левой части([2]). Приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} u(x,\,t)&=f(t)e^{a_{11}x}+a_{12}\int\limits_0^x e^{a_{11}(x-x')}v(x',\,t)\mathrm{d}x',\\ v(x,\,t)&=g(x)e^{a_{22}t}+a_{21}\int\limits_0^t e^{a_{22}(t-t')}u(x,\,t')\mathrm{d}t'. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим $v(x,t)$ из второго равенства в первое. Получим уравнение для определения $u(x,t)$:

$$u(x,t)=a_{12}a_{21}\int\limits_0^x\int\limits_0^t e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')}u(x',\,t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t'+f(t)e^{a_{11}x}+a_{12}e^{a_{22}t}\int\limits_0^x e^{a_{11}(x-x')}g(x')\,\mathrm{d}x',$$

или в виде

$$u(x,\,t)=\int\limits_0^x\int\limits_0^t K(x,\,t,\,x',\,t')u(x',\,t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t'+h(x,\,t), \tag{10}$$

где $K(x,\,t,\,x',\,t')=a_{12}a_{21}e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')}$, а функция $h(x,\,t)$ имеет оценку $|h(x,\,t)|<Ce^{-\kappa(x+t)}$.

Мы получили интегральное уравнение Вольтерра второго рода([3]). Очевидно, что из уравнения (10) и второго уравнения (9) следует (5) и наоборот.

Зададим последовательность приближений задачи (10) по рекуррентной формуле

$$u_{n+1}(x,\,t)=\int\limits_0^x\int\limits_0^t K(x,\,t,\,x',\,t')u_n(x',\,t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t'+h(x,\,t),$$

причем $u_0(x,\,t)\equiv 0$. Функции $u_n(x,\,t)$ непрерывны. Имеет место представление

$$u_n=u_0+\sum_{k=1}^{n}\left(u_k-u_{k-1}\right).$$

Оценим разности в последнем равенстве:

$$|u_1-u_0|=|h(x,\,t)|<Ce^{-\kappa(x+t)},$$

$$\begin{aligned} |u_2-u_1|&\le|a_{12}a_{21}|\int\limits_0^x\int\limits_0^t e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')}\,|u_1(x',\,t')-u_0(x',\,t')|\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}t'<\\ &<|a_{12}a_{21}|C\int\limits_0^x\int\limits_0^t e^{a_{11}(x-x')}e^{-\kappa x'}e^{a_{22}(t-t')}e^{-\kappa t'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t'\le\\ &\le C\frac{|a_{12}a_{21}|}{|a_{11}+\kappa||a_{22}+\kappa|}e^{a_{11}x}e^{a_{22}t}\left|\left(e^{-(a_{11}+\kappa)x}-1\right)\left(e^{-(a_{22}+\kappa)t}-1\right)\right|<C\left|\frac{a_{12}a_{21}}{(a_{11}+\kappa)(a_{22}+\kappa)}\right|e^{-\kappa(x+t)}, \end{aligned}$$

$$\left|u_{k+1}-u_k\right|<C\left|\frac{a_{12}a_{21}}{\left(a_{11}+\kappa\right)\left(a_{22}+\kappa\right)}\right|^k e^{-\kappa(x+t)}.$$

Мажорантный для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k-u_{k-1}\right)$ ряд

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_{12}a_{21}}{\left(a_{11}+\kappa\right)\left(a_{22}+\kappa\right)}\right|^k e^{-\kappa(x+t)}$$

при $q=\left|\frac{a_{12}a_{21}}{\left(a_{11}+\kappa\right)\left(a_{22}+\kappa\right)}\right|<1$ сходится, следовательно, последовательность $u_n(x,\,t)$ равномерно сходится к $u(x,\,t)$, где $u(x,\,t)$— непрерывная при $x\geq 0$, $t\geq 0$ функция, $\left|u(x,\,t)\right|<C\frac{q}{1-q}e^{-\kappa(x+t)}$.

Условие (7) является достаточным для сходимости ряда. Действительно, если

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}+\kappa}\right|<1 \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{a_{21}}{a_{22}+\kappa}\right|<1,$$

то есть (с учетом условия (4)) $a_{11}+\left|a_{12}\right|=-\kappa<0$, $a_{22}+\left|a_{21}\right|=-\kappa<0$ как только $\kappa\leq\min(\kappa_1,\,\kappa_2)$, то решение с нужной оценкой существует. Но это условие не является необходимым, так как ряд может сходиться и при других условиях (например, $a_{11}+\left|a_{21}\right|<0$, $a_{22}+\left|a_{12}\right|<0$ и др.). Причина, по которой удобно выбрать именно эти неравенства, состоит в том, что они появляются также при доказательстве оценки остаточного члена задачи (1).

Единственность. Пусть $u_1(x,\,t)$, $u_2(x,\,t)$ — два непрерывных решения (10), а $\bar{u}(x,\,t)$ — их разность. Тогда

$$\bar{u}(x,\,t)=\int_0^x\int_0^t K(x,\,t,\,x',\,t')\bar{u}(x',\,t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t', \quad \left|\bar{u}(x,\,t)\right|<Ce^{-\kappa(x+t)}.$$

Оценивая правую часть, имеем

$$\left|\bar{u}(x,\,t)\right|<Cqe^{-\kappa(x+t)} \quad (q<1).$$

После к–го шага:

$$\left|\bar{u}(x,\,t)\right|<Cq^k e^{-\kappa(x+t)}.$$

Если $\bar{u}(x,\,t)$ тождественно не равно нулю, то в некоторой точке $(x_0,\,t_0)$ отлично от нуля, а значит, $u(x_0,\,t_0)>\varepsilon$, но при достаточно большом k $u(x_0,\,t_0)<\varepsilon$, где ε — сколь угодно малая величина. Мы пришли к противоречию, то есть $\bar{u}(x,\,t)\equiv 0$.

3. Резольвента для уравнения (9)

Резольвента для уравнения Вольтерра строится как ряд (если он сходится), составленный из повторных ядер:

$$R(x,\,t,\,x',\,t')=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,\,t,\,x',\,t'), \tag{11}$$

где $K_n(x,t,x',t')=\int\limits_{x'}^{x}\int\limits_{t'}^{t}K(x,t,s,p)K_{n-1}(s,p,x,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p$ — рекуррентное соотношение для определения повторных ядер. Проведем их вычисление.

$$K_2(x,t,x',t')=\left(a_{12}a_{21}\right)^2\int\limits_{x'}^{x}\int\limits_{t'}^{t}e^{a_{11}(x-s)}e^{a_{11}(s-x')}e^{a_{22}(t-p)}e^{a_{22}(p-t')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p=$$

$$=\left(a_{12}a_{21}\right)^2(x-x')(t-t')e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')},$$

$$K_n(x,t,x',t')=\left(a_{12}a_{21}\right)^n\frac{\left(x-x'\right)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\left(t-t'\right)^{n-1}}{(n-1)!}e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')}.$$

Решение уравнения (9) запишется так:

$$u(x,t)=\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{t}R(x,t,x',t')h(x',t')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t'+h(x,t). \tag{12}$$

Для резольвенты имеем оценки

$$\left|R(x,t,x',t')\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|K_n(x,t,x',t')\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{12}a_{21}\right|^n\frac{\left(x-x'\right)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\left(t-t'\right)^{n-1}}{(n-1)!}e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')}<$$

$$<C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left|a_{12}\right|\left(x-x'\right)\right)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left|a_{21}\right|\left(t-t'\right)\right)^{n-1}}{(n-1)!}e^{a_{11}(x-x')}e^{a_{22}(t-t')}<$$

$$<Ce^{(a_{11}+\left|a_{12}\right|)(x-x')}e^{(a_{22}+\left|a_{21}\right|)(t-t')},$$

Откуда, учитывая неравенства (7), получаем, что ряд (11) равномерно сходится, а для резольвенты справедлива экспоненциальная оценка. Нетрудно получить оценки (8) для решения задачи (10). Ясно, что решение (12) будет обладать непрерывными частными производными.

Заключение

Таким образом, для системы (5) доказаны существование и единственность гладкого решения, имеющего оценку (8) при условиях на коэффициенты правой части (7) и граничных данных (6). Это решение может быть получено из соотношения (12), для которого построена резольвента.

Список литературы

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш шк., 1990. 208 с.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, Физматлит, 1998. 232 с.
3. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002. 160 с.