

УДК 551.508.86

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ ДО ДИПОЛЬНОГО ИСТОЧНИКА СДВ-ИЗЛУЧЕНИЯ

А.В. Панюков, Д.В. Будуев

e-mail: a_panyukov@mail.ru, dbuduev@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 13 октября 2004 г.

1. Математическая модель

Задачу определения дальности до произвольно ориентированного дипольного источника излучения в радиусе до 100 км можно решить, используя диапазон СДВ. Вполне адекватной математической моделью земной поверхности для рассматриваемых расстояний и длин волн является бесконечно проводящая плоскость. Как показано в [1], ортогональные проекции компонент поля, индуцируемого в точке О электрическим диполем, размещенным над бесконечно проводящей плоскостью, равны

$$e_z(t) = q(t)v + q'(t)\frac{v}{\alpha} + q''(t)\frac{u}{\alpha^2}, \quad h_{xoy}(t) = \left(q'(t)\frac{1}{\alpha} + q''(t)\frac{1}{\alpha^2} \right), \quad e_x(t) = e_y(t) = h_z(t) = 0.$$

Здесь $\alpha = c/\rho$ — величина, обратная времени распространения волны от источника до точки наблюдения, переменные $u, v, q(t)$ — неизвестные параметры источника излучения.

Компоненты e_z, h_{xoy} могут быть измерены с помощью антенной системы, состоящей из вертикальной электрической антенны и пары взаимно ортогональных рамочных магнитных антенн и, следовательно, использованы в качестве исходных данных для решения задачи оценки дальности до точки размещения диполя.

2. Прямой алгоритм

В работах [1, 2] предложен и исследован прямой алгоритм определения параметров u, v , и α в модели:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{h}_1\tilde{e}_2 - \tilde{h}_2\tilde{e}_1}{\tilde{h}_2\tilde{e}_0 - \tilde{h}_1\tilde{e}_1}}, \quad u = \frac{\tilde{e}_0\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1^2}{\tilde{h}_2\tilde{e}_0 - \tilde{h}_1\tilde{e}_1}, \quad v = \frac{3\tilde{h}_0u\alpha - \tilde{e}_0\alpha - g}{2\tilde{h}_0\alpha},$$

где

$$\tilde{e}_k = \int_0^T e_z^{(k)}(t)h_{xoy}^{(k)}(t)dt, \quad \tilde{h}_k = \int_0^T \left(h_{xoy}^{(k)}(t) \right)^2 dt, \quad \tilde{g} = \int_0^T e_z'(t)h_{xoy}(t)dt, \quad k=0, 1, 2, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega_0},$$

Ω_0 — нижняя частота среза входного фильтра.

Предположение наличия в наблюдаемых сигналах белого шума с интенсивностью N переводит оцениваемые параметры в категорию случайных величин. В этом случае математические ожидания относительной погрешности оценок дальности ρ и параметра u , их дисперсии и ковариация оказываются равными

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\delta_\rho\} &= 1 - \sqrt{\frac{2\pi\Omega_0(A_2A_4 - A_3^2) + \alpha^4 N(A_2C_2 - A_3C_1)}{2\pi\Omega_0(A_2A_4 - A_3^2) + \alpha^2 N(A_4C_1 - A_3C_2)}}, \\ \mathbf{E}\{\delta_u\} &= -\frac{uN\alpha^4}{\Omega_0} \frac{A_2C_2 - A_3C_1}{\Omega_0(A_2A_4 - A_3^2) + \alpha^4 N(A_2C_2 - A_3C_1)}, \\ \mathbf{D}\{\delta_\rho\} &= \frac{N(1+u^2)}{8u^2\pi} \frac{A_4^2B_4 + A_3^2B_6 - 2A_3A_4B_5}{(A_3^2 - A_2A_4)^2} + o(\alpha^2), \\ \mathbf{D}\{u\} &= \frac{N(1+u^2)\alpha^4}{2\pi} \frac{A_3^2B_4 + A_2^2B_6 - 2A_3A_2B_5}{(A_3^2 - A_2A_4)^2} + o(\alpha^4), \\ \mathbf{C}\{\delta_\rho, u\} &= \frac{N(1+u^2)\alpha^2}{4u\pi} \frac{(A_4B_4 + A_2B_6)A_3 - (A_3^2 + A_2A_4)B_5}{(A_3^2 - A_2A_4)^2} + o(\alpha^4), \end{aligned}$$

где

$$A_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^2 |Q(\omega)|^2 d\omega, \quad B_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^4 |Q(\omega)|^2 d\omega, \quad C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2m} |F(\omega)|^2 d\omega,$$

$Q(\omega)$, $F(\omega)$ — спектральные характеристики источника излучения и входного фильтра для преобразования наблюдаемых сигналов соответственно.

Рассмотрим источник излучения со спектральной характеристикой, удовлетворяющей ограничению

$$|Q(\omega)|^2 = \frac{M}{\omega^4}.$$

Такой спектр аппроксимирует усредненные амплитудно-частотные спектры молниевых разрядов в диапазоне от 100 Гц до 10 КГц. В качестве формирующего фильтра будем использовать интегратор с ограниченной полосой пропускания

$$|F(\omega)| = \begin{cases} \frac{L}{\omega}, & \text{при } \omega \in [\Omega_0, \Omega_1], \\ 0 & \text{при } \omega \notin [\Omega_0, \Omega_1]. \end{cases}$$

При указанных Q и F имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\delta_\rho\} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{N\alpha^4}{2\pi\Omega_0 M}}, \quad \mathbf{E}\{\delta_u\} = -u \left(1 + \frac{2\pi\Omega_0 M}{N\alpha^4} \right)^{-1}, \\ \mathbf{D}\{\delta_\rho\} &= \frac{N(1+u^2)}{10u^2\pi M} \frac{\Omega_0^2\Omega_1^2 (4\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1 + 4\Omega_1^2)}{(\Omega_1 - \Omega_0)^3} + o\left(\frac{\alpha^2}{\Omega_1^2}\right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}\{u\} = \frac{3N(1+u^2)\alpha^4}{10\pi M} \cdot \frac{3\Omega_0^2 - 7\Omega_0\Omega_1 + 3\Omega_1^2}{(\Omega_1 - \Omega_0)^3} + o\left(\frac{\alpha^8}{\Omega_1^8}\right),$$

$$\mathbf{C}\{\delta_p, u\} = \frac{N(1+u^2)\alpha^2}{4\pi M} \cdot \frac{\Omega_0\Omega_1(4\Omega_0^2 - 7\Omega_0\Omega_1 + 3\Omega_1^2)}{(\Omega_1 - \Omega_0)^3} + o\left(\frac{\alpha^4}{\Omega_1^4}\right).$$

Из полученных формул видно, что математические ожидания погрешностей являются монотонно убывающими функциями параметра Ω_0 и не зависят от верхней частоты среза Ω_1 . Их дисперсии, наоборот, являются монотонно возрастающими функциями параметра Ω_0 ($\Omega_0 < \Omega_1$). При фиксированном значении Ω_0 дисперсия $\mathbf{D}\{\delta_p\}$ является унимодальной функцией параметра, ее минимум достигается при $\Omega_1 = (9 + \sqrt{145})\Omega_0 / 4 \approx 5,261 \cdot \Omega_0$. Считая, что верхняя частота среза удовлетворяет последнему равенству, находим

$$\mathbf{E}\{\delta_p\} \approx 0,166 \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^2 \frac{E_n}{E_s}, \quad \mathbf{E}\{\delta_u\} = 9,193 \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^4 \frac{E_n}{E_s},$$

$$\mathbf{D}\{\delta_p\} = 27 \cdot 10^{-3} \frac{1+u^2}{u^2} \frac{E_n}{E_s}, \quad \mathbf{D}\{u\} = 3,562(1+u^2) \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^4 \frac{E_n}{E_s},$$

$$\mathbf{C}\{\delta_p, u\} = 0,282 \frac{1+u^2}{u} \left(\frac{\alpha}{\Omega_1}\right)^2 \frac{E_n}{E_s},$$

где

$$E_n = \frac{N}{2\pi} (\Omega_1 - \Omega_0) T \approx 4,26N, \quad E_s = \int_{\Omega_0}^{\Omega_1} |Q(\omega)|^2 d\omega \approx 2,289 \cdot 10^{-3} \frac{M}{\Omega_1^3}$$

энергия шума и энергия сигнала соответственно.

Отношение E_n/E_s можно интерпретировать как относительную погрешность моделирования. Рассматриваемый алгоритм вполне устойчив при определении параметра u . Дисперсия $\mathbf{D}\{\delta_p\}$ оценки дальности существенно зависит от величины параметра u . Тем не менее, при значениях параметра $u > 27 \cdot 10^{-3}$ дисперсия относительной погрешности оценки дальности не превосходит относительной погрешности моделирования. Если же $u \rightarrow 0$ то дисперсия $\mathbf{D}\{\delta_p\} \rightarrow \infty$. Однако, наличие оценки параметра u позволяет в каждом случае оценить не только расстояние до источника излучения, но и дисперсию оценки, и в зависимости от полученных результатов принять адекватное решение о возможном месте его размещения.

3. Экстремальный алгоритм

Прямой алгоритм был получен в предположении, что источник излучения является диполем, а подстилающая поверхность — плоскостью с бесконечной проводимостью. В силу неидеальности моделей и наличия шумов в наблюдаемых сигналах, приходится допускать наличие невязок в полученных уравнениях. Поэтому, с интуитивной точки зрения предпочтительней использовать принцип наименьших квадратов, в соответствии с которым параметры модели определяются из условия

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \left[x_1 e' + x_2 e + x_3 h' + x_4 h + x_5 \int_0^t h(\tau) d\tau \right]^2 dt = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}},$$

где

$$\mathbf{A} = \int_0^\infty \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T dt, \quad \mathbf{s} = \left(k \cdot e'(t) \quad e(t) \quad k \cdot h'(t) \quad h(t) \quad \frac{1}{k} \int_0^t h(\tau) d\tau \right)^T,$$

k — постоянная времени дифференцирующего и интегрирующего звеньев, введенная для согласования масштабов координат вектора \mathbf{x} .

Пусть $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ — собственные числа матрицы \mathbf{A} , $\mathbf{x}^{(i)}, i=0, 1, 2, 3, 4$ — соответствующие собственные векторы. Экстремальный алгоритм [3] определения параметров u , v , и α , устойчивый к ошибкам в исходных данных состоит в вычислении

$$k\alpha_{1,2} = \begin{cases} \frac{2\Delta_{25}}{-\Delta_{24} - \Delta_{15} \pm \sqrt{(\Delta_{24} + \Delta_{15})^2 - 4\Delta_{14}\Delta_{25}}}, & \text{если } |\Delta_{25}| \geq |\Delta_{14}|, \\ \frac{-\Delta_{24} - \Delta_{15} \mp \sqrt{(\Delta_{24} + \Delta_{15})^2 - 4\Delta_{14}\Delta_{25}}}{2\Delta_{14}}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$u_i = \frac{k\alpha_i \Delta_{13} + \Delta_{23}}{\Delta_{12}}, \quad v_i = \frac{-\Delta_{45}}{k\alpha_i \Delta_{24} + \Delta_{25}}, \quad i=1, 2,$$

$$i^* = \arg \min_{i=1,2} \left[\left(1, k\alpha_i, -u_i, -k\alpha_i v_i, -k^2 \alpha_i^2 v_i \right) \mathbf{A} \left(1, k\alpha_i, -u_i, -k\alpha_i v_i, -k^2 \alpha_i^2 v_i \right)^T \right],$$

$$\alpha = \alpha_{i^*}, \quad u = u_{i^*}, \quad v = v_{i^*},$$

где Δ_{mn} — определитель матрицы, полученной из матрицы $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{x}^{(4)})$ путем удаления строк с номерами m и n . Если найденные значения параметра α имеют разные знаки, то в качестве решения используется положительное значение.

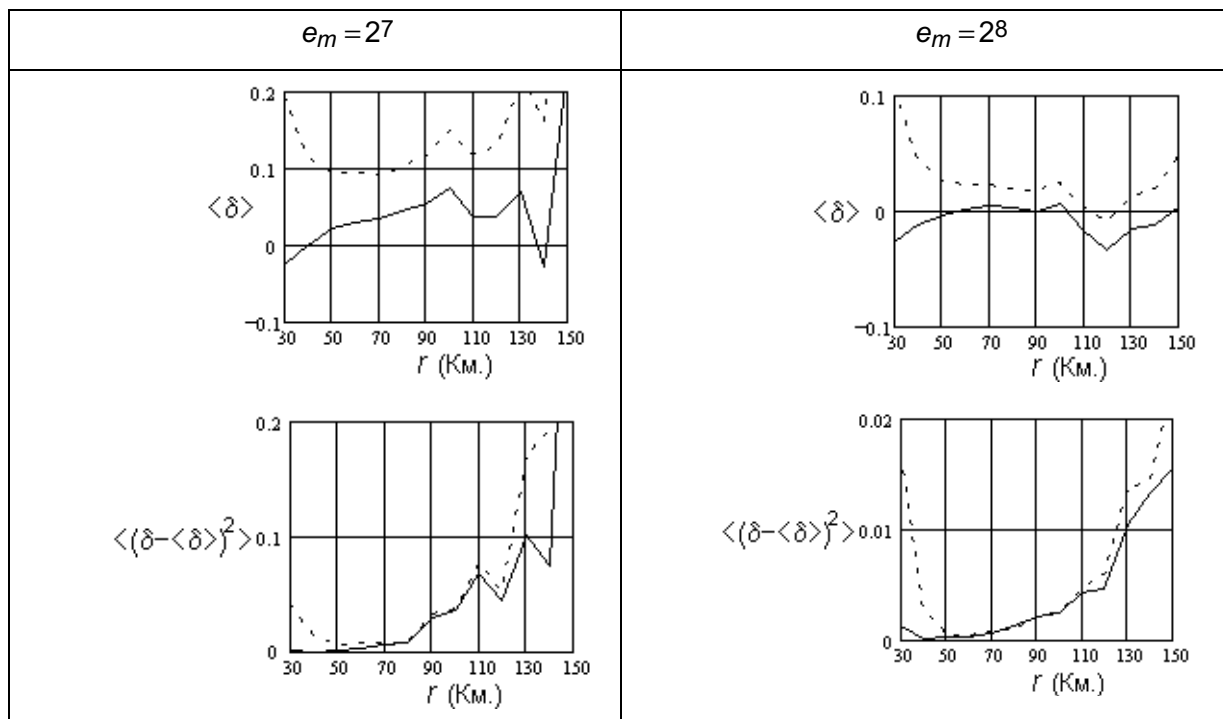
Для анализа точности и устойчивости экстремального алгоритма, а также сравнения его характеристик с прямым алгоритмом [1, 2] был проведен вычислительный эксперимент. Программная реализация экстремального алгоритма выполнена с соблюдением следующих соглашений: сигналы $e(t)$, $h(t)$ представлены целочисленными отсчетами мгновенных значений в дискретные моменты времени, шаг дискретизации по времени — $\Delta t = 2$ Мкс, число уровней квантования — 2^{16} . Входные сигналы $e(t)$, $h(t)$ предварительно обрабатываются сглаживающим фильтром. Для численного дифференцирования и интегрирования использованы обычные разностные и квадратурные формулы с точностью $O(\Delta t^2)$. Для решения полной симметричной проблемы собственных значений применяется метод вращений Гивенса.

Для генерации сигналов $e(t)$, $h(t)$ использована программа-имитатор из библиотеки [4]. В качестве дипольного момента использованы аппроксимации атмосфериков первого, второго и третьего типа по классификации Тейлора. Параметров u принимает значения из диапазона $[0,05, 1]$ с шагом 0,05; параметр v — из диапазона $[-1, 1]$ с шагом 0,1. Предметом анализа являлись зависимости среднего значения $\langle \delta \rangle$ относительной погрешности \square оценки расстояния r ,

а также среднеквадратического отклонения $\left\langle (\delta - \langle \delta \rangle)^2 \right\rangle$.

Из-за сложности аналитического описания погрешностей моделирования, для их имитации используется шум квантования при цифровом представлении принимаемых сигналов. Исследование влияния шума квантования на характеристики алгоритма проводилось посредством изменения амплитуды моделируемых сигналов. В частности, эксперимент показал возможность необнаружения источника излучения при амплитуде e_m сигнала $e(t)$ меньше 2^7 , что соответствует среднему значению отношения уровня шума к уровню сигнала 0,1, а также практическую

безошибочность определения дальности при амплитуде $e_m \geq 2^9$, что соответствует среднему значению отношения уровня шума к уровню сигнала 0,06. В связи с этим, более подробно рассмотрим результаты вычислительного эксперимента при амплитудах e_m равных 27 и 28, представленные на рисунке.



Экспериментальные характеристики точности прямого и экстремального алгоритмов:

—— — экстремальный алгоритм; --- — прямой алгоритм

Из рисунка видно, что экстремальный алгоритм дает более качественные характеристики точности по сравнению с прямым алгоритмом. Наиболее существенное различие в характеристиках наблюдается для расстояний меньших 50Км: погрешность прямого метода резко возрастает с уменьшением расстояния, а погрешность экстремального метода — убывает. Поскольку с уменьшением расстояния возрастает погрешность представления реального источника в виде электрического диполя, то результаты эксперимента демонстрируют, что при расстояниях $r < 50$ Км более целесообразным является использование экстремального алгоритма.

Заключение

Представленная математическая модель адекватна задаче определения местоположения молниевых разряда в ближней зоне, решение которой имеет большое значение, как для фундаментальной науки, так и для практики.

Аналитически исследовано, что прямой алгоритм является устойчивым. Данный алгоритм выведен в предположении, что в уравнениях исходной модели имеют место точные равенства. В силу неидеальности моделей и наличия шумов в наблюдаемых сигналах, приходится допускать наличие невязок в уравнениях модели. Поэтому, с интуитивной точки зрения, искомые параметры предпочтительнее определять, используя принцип наименьших квадратов. Эта идея была развита при разработке экстремального алгоритма.

Аналитическое исследование экстремального метода в настоящее время не представляется возможным, поэтому для анализа точности и устойчивости был проведен вычислительный эксперимент. Совместное численное исследование прямого и экстремального метода усиливают утверждение об устойчивости экстремального метода. Исследование влияния шума квантования на точность вычислений, позволяет, во-первых, сделать вывод о лучших точностных характеристиках экстремального метода, во-вторых, определить требования к АЦП.

Список литературы

1. Panyukov A.V. Estimation of the location of an arbitrarily oriented dipole under single-point direction finding // Journal of geophysical research, 1996. Vol. 101, № D10. P. 14,977—14,982.
2. Панюков А.В. Анализ погрешности прямого алгоритма определения дальности до электрического диполя // Известия ВУЗов РФ. Радиофизика, 1999. Т. XLII. № 3. С. 266—277.
3. Панюков А.В., Будуев Д.В. Алгоритм определения расстояния до местоположения молниевоего разряда // Электричество, 2001. № 4. С. 10—14.
4. Панюков А.В., Будуев Д.В. Библиотека методов определения местоположения дипольного источника излучения. Свид. № 2002610234 // Официальный бюллетень Российского агентства по патентам и товарным знаком: Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем, 2002. №1(39). С. 149—150.