Известия Челябинского научного центра, вып. 1 (27), 2005

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО–ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

А.М. Джураев
e–mail: ajrv@mail.ru

Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика

Статья поступила 19 февраля 2005 г.

Пусть изучается система из n сингулярно–возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_\varepsilon y(t,\,\varepsilon)\equiv\varepsilon y'(t,\,\varepsilon)-A(t)y(t,\,\varepsilon)=h(t), \tag{1}$$

с краевым условием

$$Gy\equiv\{y_1(0,\,\varepsilon),\,...,\,y_{n0}(0,\,\varepsilon),\,y_{n0+1}(1,\,\varepsilon),\,...,\,y_n(1,\,\varepsilon)\}=y^0 \tag{2}$$

при $\varepsilon\to+0$, где $n_0=[n/2]$, $[.]$ — целая часть.

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с кратным спектром предельного оператора изучались Я.Д. Тамаркиным [1], где было установлено, что асимптотическое разложение решения однородной линейной дифференциальной системы второго порядка содержит дробные степени малого параметра. Для дифференциальных уравнений n–го порядка такой результат были получены Трджинским [2] и Территиным [3]. Система $x'(t,\,\varepsilon)=A(\text{т},\,\varepsilon)x$, где $\text{т}=\varepsilon t$, в случае, когда уравнение $\det[\lambda E-A(\text{т},\,0)]=0$ имеет кратные корни и матрица эквивалентна жордановой клетке, изучались в работе Н.И. Шкиля [4]. Регуляризованная асимптотика решения задачи Коши для системы с кратным спектром дифференциальных уравнений в случае предельного оператора жордановой структуры получена С.А. Ломовым [5] и А.Г. Елисеевым [6, 7]. Краевые задачи (1),(2) в случае предельного оператора жордановой структуры впервые изучены в [8]—[18].

В настоящей работе изучается краевая задача (1), (2), когда матрица $A(t)$ имеет тождественно кратный спектр и разрабатывается алгоритм асимптотического интегрирования краевой задачи в случае нестабильности спектра.

Для изучения задачи (1), (2) при достаточно малых ε потребуем выполнение следующих условий:

I. $A(t)\in C^\infty\left([0,\,1],\,C^{n\times n}\right)$, $h(t)\in C^\infty\left([0,1],\,C^n\right)$;

II. Спектр $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^n$ матрицы $A(t)$ при каждом $t\in[0,\,1]$ удовлетворяет требованиям:

1) $\lambda_k(t)=\lambda(t)$, $k=1,\,...,\,n$;
2) $\operatorname{Re}\lambda(t)\equiv0$;

III. Матрица имеет жорданову цепочку векторов длины n, т. е.

$$\forall t\in[0,\,1];\quad A(t)\varphi_1(t)=0;\quad A(t)\varphi_i(t)=\varphi_{i-1}(t);\ i=2,\,...,\,n.$$

IV. Каноническая структура матрицы $A(t)$, т. е. $A(t)=\lambda(t)E+T(t)$, где $T(t)$ — собственный нильпотент матрицы $A(t)$, не меняется на отрезке [0, 1];

Производные от собственного и присоединенных векторов разложим по базису $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$:

$$\varphi_i'(t)=\sum_{k=1}^{n} C_i^k(t)\varphi_k(t).$$

Из коэффициентов разложения составим «структурную» матрицу

$$B=\begin{pmatrix} C_1^1(t) & C_2^1(t) & \ldots & C_n^1(t) \\ C_1^2(t) & C_2^2(t) & \ldots & C_n^2(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1^n(t) & C_2^n(t) & \ldots & C_n^n(t) \end{pmatrix}$$

и будем требовать, чтобы для $C_1^n(t)$ выполнялось условие $\forall t\in[0, 1]$; $\operatorname{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k<0$; $k=1, \ldots, n_0$; $\operatorname{Re}\sqrt[n]{-C_1^n(t)}\xi^k>0$; $k=n_0+1, \ldots, n$, где ξ — первообразный корень n–ой степени из единицы.

V. Собственное значение $\lambda(t)$ при каждом $t\in[0, 1]$ удовлетворяет требованию:

$$\lambda(t)=a(t)\prod_{j=0}^{r}\left(t-t_j\right)^{k_j}, \quad a(t)\neq 0.$$

Разложим правую часть $h(t)$ по базису $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$: $h(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} h_k(t)\varphi_k(t)$.

VI. $h_n(0)=0, \ \lim\limits_{t\to t_j}\dfrac{d^i}{dt^i}\sum\limits_{k=0}^{n-s}(-1)^k\dfrac{h_{k+s}(t)}{\lambda^k(t)}=0, \quad s=1, \ldots, n-1;\ j=0, \ldots, r;\ i=0, \ldots, k_j-1.$

VII. $G_0\varphi_1(0)\neq 0, \ G_1\varphi_1(1)\neq 0$.

Предположим, что векторы $\varphi_k(t)=\left(\varphi_{1,\,k}(t), \ldots, \varphi_{n,\,k}(t)\right)$; $k=1, \ldots, n$, такие, что $\varphi_{i,\,k}(t)\equiv 0$; $i<k$; $k=1, \ldots, n$. Задача (1),(2) при выполнении условия V является сингулярной возмущенной задачей с нестабильным спектром.

При построении асимптотических решений задач типа (1), (2) с нестабильным спектром, исключительно важную роль играют так называемые полиномы Лагранжа—Сильвестра, построенные по узлам $\left(t_j;\, f^{(s)}(t_j)\right)$ функции $f(t)$ и ее производных до определенного порядка в точках t_j нестабильности спектра матрицы $A(t)$.

Пусть даны функция $f(t)\in C^{\infty}[0, 1]$ и многочлен $P(t)\equiv\prod\limits_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}$. Многочлен $r(t)=r(t; f)$ называется полиномом Лагранжа—Сильвестра функции $f(t)$ относительно многочлена $P(t)$, если степень многочлена *r(t)* меньше степени многочлена $P(t)$ и имеются итерационные равенства

$$r^{(s)}(t_j)=f^{(s)}(t_j);\ j=0, \ldots, r;\ s=0, \ldots, k_j-1.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть *r(t)* —полином Лагранжа—Сильвестра функции $f(t)$ относительно многочлена $P(t)$. Тогда существует единственная функция $a(t)$ такая, что $f(t)-r(t)\equiv a(t)P(t)$.

Для построения полиномов Лагранжа—Сильвестра используется следующая лемма.

Лемма 2. Для функции $f(t)$ существует единственный полином Лагранжа—Сильвестра $r(t)$ относительно многочлена $P(t)$ в виде

$$r(t)=\prod_{j=0,\, j\neq i}^{r}\left(t-t_j\right)^{k_j}\sum_{j=0}^{r}\left[\frac{A_{k_j}^{(j)}}{(t-t_j)^{k_j}}+\ldots+\frac{A_1^{j}}{t-t_j}\right],$$

где

$$A_{k_j}^{(j)}=\frac{f(t_j)}{\alpha_j(t_j)},\ \ldots,\ A_{k_j-i}^{(j)}=\frac{1}{i!}\left[\frac{f(t)}{\alpha_j(t)}\right]^{(i)}\Bigg|_{t=t_j},\ \ldots,\ A_1^{(j)}=\frac{1}{(k_j-1)!}\left[\frac{f(t)}{\alpha_j(t)}\right]^{(k_j-1)}\Bigg|_{t=t_j}$$

$$\alpha_j(t)\equiv\frac{P(t)}{\left(t-t_j\right)^{k_j}},\ j=0,\ldots,r;\ i=0,\ldots,k_j-1\ .$$

Базисной системой полиномов Лагранжа—Сильвестра относительно многочлена $P(t)$ называется система полиномов $\left\{K_{ji}(t)\right\}$ $\left(i=0,\ldots,r;\ j=0,\ldots,k_j-1\right)$, если степень системы полиномов $\left\{K_{ji}(t)\right\}$ меньше степени многочлена $P(t)$ и для функции ее полином Лагранжа—Сильвестра представляется в виде

$$r(t)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}f^{(i)}(t_j)K_{ji}(t)\,.$$

Переходим к изучению краевой задачи (1), (2). Пусть $K_{ji}(t)$, $i=0,\ldots,r$, $j=0,\ldots,k_j-1$, базисная система полиномов Лагранжа—Сильвестра относительно многочлена

$$P(t)\equiv\frac{\lambda(t)}{\alpha(t)}=\prod_{j=0}^{r}\left(t-t_j\right)^{k_j}.$$

Для описания существенно особых сингулярностей, содержащихся в решении задачи (1), (2) из–за условия V введем дополнительные независимые переменные по формулам

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[\lambda(x)+\sqrt[n]{\varepsilon}\,g_{1,k}(x)+\ldots+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]\mathrm{d}x\equiv\psi_k(t,\varepsilon);\ k=1,\ldots,n_0,$$

$$\tau_k=\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\left[\lambda(x)+\sqrt[n]{\varepsilon}\,g_{1,k}(x)+\ldots+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}(x)\right]\mathrm{d}x\equiv\psi_k(t,\varepsilon);\ \ k=n_0+1,\ldots,n.$$

$$\sigma_{kji}=e^{\psi_k(t,\varepsilon)}\int_0^t e^{-\psi_k(t,\varepsilon)}K_{ji}(x)\mathrm{d}x\equiv\theta_{kji}(t,\varepsilon);\ k=1,\ldots,n_0;\ i=0,\ldots,k_j-1;\ j=0,\ldots,r,$$

$$\sigma_{kji}=e^{\psi_k(t,\varepsilon)}\int_1^t e^{-\psi_k(t,\varepsilon)}K_{ji}(x)\mathrm{d}x\equiv\theta_{kji}(t,\varepsilon);\ k=n_0+1,\ldots,n;\ i=0,\ldots,k_j-1;\ j=0,\ldots,r.$$

Введя обозначения $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $\varphi(t,\varepsilon)=\left(\varphi_1(t,\varepsilon),\ldots,\varphi_n(t,\varepsilon)\right)$, $\sigma=\left\{\sigma_{kji}\right\}$, $\theta(t,\varepsilon)=\left\{\theta_{kji}(t,\varepsilon)\right\}$, вместо искомого решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (1),(2) изучим «расширенную» функцию $u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ для которой $u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{\tau=\psi(t,\varepsilon)\\ \sigma=\theta(t,\varepsilon)}}\equiv y(t,\varepsilon)$. Выделим $M_0=M_0\left(0,\psi(0,\varepsilon),\theta(0,\varepsilon)\right)$, $M_1=M_1\left(1,\psi(1,\varepsilon),\theta(1,\varepsilon)\right)$ и для определения расширенной функции $u(t,\mathrm{т},\sigma,\varepsilon)$ получаем следующую задачу

$$\varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}K_{ji}(t)\frac{\partial u}{\partial\sigma_{kji}}\right]+\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda+\sqrt[n]{\varepsilon}g_{1,k}+\ldots+\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,n-1}g_{n-1,k}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial\tau_k}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\sigma_{kji}(t)\frac{\partial u}{\partial\sigma_{kji}}\right]-Au=h, \quad (3)$$

$$G_0u\left(M_0,\varepsilon\right)+G_1u\left(M_1,\varepsilon\right)=y^0 \quad (4)$$

при $\varepsilon\to 0$.

Задача (3), (4) является регулярной по малому параметру ε, и ее решение определим в виде степенного ряда

$$u(t,\tau,\sigma,\varepsilon)=\sum_{s=-n_1}^{\infty}\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s}u_s(t,\tau,\sigma), \quad (5)$$

с коэффициентами из пространстве безрезонансых решений

$$U=\left\{u(t,\tau,\sigma): u=\sum_{m,k=1}^{n}u_{m,k}(t)\varphi_m(t)e^{\tau_k}+\sum_{m,k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}u_{m,k,j,i}(t)\varphi_m\sigma_{kji}+\sum_{m=1}^{n}u_m(t)\varphi_m(t),\right.$$
$$\left.u_{m,k}(t),\ u_{m,k,j,i}(t),\ u_m(t)\in C^{\infty}\left([0,1],C\right)\right\}.$$

В пространстве безрезонансых решений U зададим следующие операторы

$$\begin{cases} L_0\equiv A(t)-\lambda(t)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=o}^{k_j-1}\sigma_{kji}\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}}\right), \\ L_m\equiv\sum_{k=1}^{n}g_{m,k}(t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=o}^{k_j-1}\sigma_{kji}\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}}\right),\ m=1,\ \ldots,\ n-1, \\ L_n\equiv\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}K_{ji}(t)\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}},\ Gu\equiv G_0u(M_0,\varepsilon)+G_1u(M_1,\varepsilon)\end{cases} \quad (6)$$

С учетом (6) из задачи (3), (4) переходим к задаче

$$L_0u=\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt[n]{\varepsilon}^{\,m}L_mu+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-h, \qquad Gu=y^0. \quad (7)$$

Для определения коэффициентов степенного ряда (5) подставим его в задачу (7) и получаем следующие итерационные задачи

$$L_0u_{1-n_1}=0, \qquad Gu_{1-n_1}=0, \quad (8)$$

$$L_0u_{s-n}=\sum_{m=1}^{s-1}L_mu_{s-m-n}-\delta_{n_1}^{s}h;\ Gu_{s-n}=\delta_n^s y^0;\ \ s=2..n, \quad (9)$$

$$L_0u_s=\sum_{m=1}^{n}L_mu_{s-m}+\frac{\partial u_{s-n}}{\partial t};\ \ Gu_s=0;\ \ s=1,\ \ldots,\ \infty\ . \quad (10)$$

Для задач (8)—(10) разработаем теорию разрешимости и однозначной разрешимости в пространстве U. Пусть пространство U^*, сопряженное к пространству U имеет вид

$$U^*=\left\{v(t,\tau,\sigma)\colon v=\sum_{m,k=1}^{n}v_{m,k}(t)\varphi_m^*(t)e^{\tau_k}+\sum_{m,k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}v_{m,k,j,i}(t)\varphi_m^*\sigma_{kji}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{n}v_m(t)\varphi_m^*(t),\ v_{m,k}(t),\ v_{m,k,j,i}(t),\ v_m(t)\in C^\infty\left([0,1],C\right)\right\}.$$

где $\varphi_1^*(t)$, ..., $\varphi_n^*(t)$ — жорданов набор векторов сопряженной матрицы $A^*(t)$. Билинейное произведение элементов $u\in U$ на элементы $v\in U^*$ определим по формуле

$$\langle u,v\rangle=\sum_{m,k=1}^{n}u_{mk}(t)\overline{v_{mk}(t)}+\sum_{m,k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}u_{mk,j,i}(t)\overline{v_{mk,j,i}(t)}+\sum_{m=1}^{n}u_m(t)\overline{v_m(t)}. \tag{11}$$

С учетом формулы (11) можно получить оператор L_0^*, сопряженный к основному оператору L_0 в виде

$$L_0^*\equiv A^*(t)+\lambda(t)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\sigma_{kji}\frac{\partial}{\partial\sigma_{kji}}\right),$$

с базисными элементами $v_{kji}^*=\varphi_n^*(t)\sigma_{kji}$, $j=0, ..., r$, $i=0, ..., k_j-1$, $v_k^*=\varphi_n^*(t)e^{\tau_k}$, $k=1, ..., n$.

Справедливы следующие теоремы разрешимости задач (8)—(10).

Теорема 1. Пусть в пространстве U дано уравнение

$$L_0u=f(t,\tau,\sigma), \tag{12}$$

где L_0 — основной оператор, $f\in U$ и выполнены условия I—V. Тогда для разрешимости уравнения (2.2.19) в U необходимо и достаточно, чтобы

1. $\left\langle f,\operatorname{Ker}L_0^*\right\rangle=0,$
2. $\lim\limits_{t\to t_j}\dfrac{d^i}{dt^i}\sum\limits_{k=0}^{n-s}(-1)^k\dfrac{\left\langle f,\varphi_{k+s}^*\right\rangle}{\lambda^k(t)}=0,\ s=1, ..., n,\ j=0, ..., r,\ i=0, ..., k_j-1.$

Теорема 2. Пусть в пространстве U дана задача

$$L_0u_1=0,\qquad Gu_1=0. \tag{13}$$

Пусть выполнены условия I—VII. Тогда:

1) существует общее решение U системы уравнений

$$L_0u_s=\sum_{m=1}^{s-1}L_mu_{s-m};\ s=2, ...,n;\ L_0u_s=\sum_{m=1}^{n}L_mu_{s-m}+\frac{\partial u_{s-n}}{\partial t};\ \ s=n+1, ..., 2n-1;$$

с произвольными постоянными;

2) если выполнены условия

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to t_j}\dfrac{d^i}{dt^i}\sum\limits_{k=0}^{n-m}(-1)^k\dfrac{\left\langle L_nu_{1+s}+\dfrac{\partial u_{1+s}}{\partial t},\varphi_k^*\right\rangle}{\lambda^k(t)}=0;\ m=1, ..., n;\ j=0, ..., r;\ i=0, ..., k_j-1;\ s=0, ..., n+n_0-1,\\ \left\langle\sum\limits_{m=1}^{n}L_mu_{2n-m}+\dfrac{\partial u_n}{\partial t},\operatorname{Ker}L_0^*\right\rangle\equiv0;\ G_0u_s(M_0)=0;\ s=2, ..., n_0;\ G_1u_s(M_1)=0;\ s=2, ..., n_1+1,\end{cases}$$

то задача (13) имеет только нулевое решение.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия I—VII. Тогда сужение ряда (5) является асимптотическим рядом при $\varepsilon \to 0$ для решения $y(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2), т. е. для достаточно малых $\varepsilon \in \left[0, \varepsilon^0\right]$ (ε^0 — достаточно мало) и $C > 0$ справедлива оценка

$$\left\| y(t,\varepsilon) - \sum_{s=1-n}^{N} \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,s} u_s(t, \psi(t,\varepsilon), \theta(t,\varepsilon) \right\| \le C \sqrt[n]{\varepsilon}^{\,N+1}.$$

Заключение

После изучения направления VII в [3—7], впервые имеется полная картина о поведении асимптотического решения уравнения (1). С помощью 1)—6) и с учетом 7) полностью исследовано уравнение (1) и впервые сформулирован критерий локальной устойчивости аналитического решения начальной задачи для систем двух линейных сингулярно–возмущенных уравнений [8].

Список литературы

1. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917. 153 с.
2. Trjitzinssky W.S. Theory of linear differential equations containing a parameter //Acta Math., 1936. Vol. 67. P. 1—50.
3. Территин Х.Л. Асимптотическое поведение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Математика, 1957. Т. 1, № 2. С. 129—159.
4. Шкиль Н.Н. Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. Киев: Вища школа,1971. 287 с.
5. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. //Мат. сб., 1952. Т. 31. С. 175—586.
6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука,1981. 493 с.
7. Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора,I,II //Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984. Т. 48, № 5. С. 999—1042.
8. Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора //Мат. сб., 1986. Т. 131(173), № 4. С. 544—557.
9. Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование краевой задачи с кратным чисто мнимым спектром // Сб. науч. тр. М.: МЭИ, 1987. № 141. С. 30—34.
10. Джураев А.М. Разработка метода регуляризации для некоторых задач с кратным спектром // Тез. кратких науч. сообщ. Всесоюз. совещания: Методы малого параметра. Нальчик: Кабардино–Балкарский гос. ун–т, 1987. С. 54.
11. Джураев А.М., Ломов С.А. Об аналитических решениях сингулярно возмущенных задач с кратным спектром //Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. Фрунзе: Илим,1988. Вып. 21. С. 240—244.
12. Джураев А.М. Сингулярно возмущенная краевая задача // Тез. докл. междунар. науч.–практ. конф. Ош: Ошск. высший колледж,1995. С. 105.
13. Джураев А.М. Об одной сингулярно возмущенной нелинейной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 1998. Вып. 27. С. 180—184.
14. Dzhuraev A.M. A problem with a multiple pure imaginary spectrum // I[st] Turkish world mathematics symposium. Elazig: Firat University, 1999. P. 124—127.
15. Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач с кратным спектром. Ош: Ошск. техн. ун–т, 1999. 108 с.
16. Джураев А.М. Краевая задача для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с чисто мнимым спектром // Науч. тр. Ошск. гос. ун–та. Физ.–мат. науки. Ош: Ош ГУ, 1999. Вып. 2. С. 77—82.
17. Джураев А.М. Краевая задача для дифференциального уравнения с чисто мнимым спектром //Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим,1999. Вып. 28. С. 212—216.
18. Джураев А.М. Теоремы разрешимости для нелинейной задачи с кратным спектром // Сб. науч. тр. Кыргызск.–Узбекск. ун–та. Ош: КУУ, 2001. Вып. 2. С. 171—176.
19. Джураев А.М. О состоянии современной теории возмущений // Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2003. Вып. 32. С. 154—158.