Известия Челябинского научного центра, вып. 2 (28), 2005

МАТЕМАТИКА

УДК 517.93

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНВАРИАНТНЫМИ МЕТРИКАМИ

А.А. Магазев, И.В. Широков
e–mail: magaz@phys.omsu.omskreg.ru, shirokov@univer.omsk.su

Омский государственный университет, г. Омск, Россия

Статья поступила 10 июня 2005 г.

Введение

Целью настоящей работы является разработка эффективного метода точного интегрирования геодезических потоков на однородных G–пространствах с инвариантными метриками, а также обобщение этого метода на случай соответствующих квантовых релятивистских волновых уравнений.

1. Геодезические потоки с инвариантными метриками. Построение канонического преобразования

Пусть **G** — связная вещественная n–мерная группа Ли, $\mathcal{G}$ — ее алгебра Ли, **H** — (n–m)–мерная замкнутая подгруппа группы **G,** H — алгебра Ли группы **H**, $M=\mathbf{G}/\mathbf{H}$ — однородное правое **G**–пространство, $\pi: \mathbf{G}\to\mathbf{H}$ — каноническая проекция группы **G** на пространство правых смежных классов M. Произвольный элемент группы можно представить в виде $g=hs(x)$, где $h\in\mathbf{H}$, $s(x)$— гладкое локальное сечение s: $\mathbf{G}\to M$ главного расслоения ($\mathbf{G}, M, \pi, \mathbf{H}$), $\pi\ s=id$.

Обозначим через $\left\{y^{\bar{a}}\right\}$ $(\bar{a}=1,\ ...,\ n-m)$, $\left\{x^{a}\right\}$ $(a=1, ..., m)$ — локальные координаты в слое **H** и в базе M соответственно. Левоинвариантные векторные поля $\xi_A(g)$, являющиеся генераторами правого регулярного представления группы **G**, в выбранных координатах имеют вид:

$$\xi_A(g)=\xi_A^{\bar{a}}(y,\ x)\ \partial_{y^{\bar{a}}}+X_A^a(x)\ \partial_{x^a}\,. \tag{1}$$

Очевидно, что векторные поля $X_A(x,\partial_x)=X_A^a(x)\partial_{x^a}$ образуют алгебру Ли G: $[X_A,\ X_B]=C_{AB}^C\ X_C$ (здесь C_{AB}^C — структурные константы алгебры $\mathcal{G}$ в некотором базисе $\{e_A\}$) и являются генераторами группы преобразований **G**, действующей на M .

Рассмотрим на однородном пространстве M произвольную G–инвариантную риманову метрику с компонентами $g_{ab}(x)$, $\det(g_{ab})\neq 0$. Для данной метрики векторные поля $X_A(x,\partial_x)$ являются векторами Киллинга, то есть $L_{X_A}g_{ab}(x)=0$. Здесь L_{X_A} — производная Ли вдоль векторного поля $X_A(x,\partial_x)$. Обозначим через $\{p_a\}, (a=1, ..., m)$ — локальные координаты в слое T_x^*M.

С помощью естественной пуассоновой структуры $\omega = dp_a \wedge dx^a$ на T^*M уравнение геодезических можно представить в гамильтоновой форме:

$$x^a = \left\{H(x,\,p),\,x^a\right\},\quad p_a = \left\{H(x,\,p),\,p_a\right\},\quad H(x,\,p) = \frac{1}{2}g^{ab}(x)p_a p_b. \tag{2}$$

Алгебра G операторов $X_A(x,\partial_x)$ допускает в общем случае алгебру инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов $L(x,\partial_x)$:

$$\left[L(x,\partial_x),\ X_A(x,\partial)\right] = 0.$$

Аналогично, функции $X_A(x,\,p) = X_A^a(x)p_a$ на T^*M образуют ту же самую алгебру Ли G относительно скобки Пуассона и допускают алгебру инвариантных функций $L(x,\,p)$ относительно пуассоновых преобразований, генерируемых алгеброй G: $\left\{L(x,\,p),\ X_A(x,\,p)\right\} = 0$. Выберем базис независимых инвариантных функций $\left\{L_\mu(x,p)\right\}$. Очевидно, что скобка Пуассона функций $L_\mu(x,\,p)$ функционально выражается через этот набор:

$$\left\{L_\mu,\,L_\nu\right\} = \Omega_{\mu\nu}(L). \tag{3}$$

Пространство F с базисом $\left\{L_\mu(x,p)\right\}$ и нелинейными коммутационными соотношениями (3) называют *функциональной алгеброй* или *F–алгеброй* (квадратичной, кубичной и т. д.).

Так как гамильтониан геодезического потока для G–инвариантной метрики является G–инвариантной функцией относительно индуцированного действия группы на T^*M, то он является функцией от базисных инвариантов $L_\mu(x,\,p)$, то есть $H = H\big(L(x,\,p)\big)$. Ниже мы будем исследовать интегрируемость системы (2), где гамильтониан H — произвольная G–инвариантная функция на T^*M.

Введем дуальное к F пространство $F^* = \{a_\mu\}$ с образующими a_μ и в пространстве гладких функций на F^* определим скобку Пуассона, превращая тем самым $C^\infty(F^*)$ в пуассонову алгебру:

$$\left\{\varphi,\ \psi\right\}^F(a) \equiv \Omega_{\mu\nu}(a)\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi(a)}{\partial a_\nu}. \tag{4}$$

Нетривиальные функции $Z_m(a)$, коммутирующие с любыми другими функциями из $C^\infty(F^*)$, называются *функциями Казимира,* а число функционально независимых функций Казимира на F^* называется *индексом* (ind F) F–алгебры. В работе [1] показано, что размерность и индекс F–алгебры могут быть посчитаны по следующим инвариантным формулам:

$$\dim F = \dim G/H - \dim H/H^\lambda,\qquad \operatorname{ind}\,F = \dim G^\lambda\big/H^\lambda. \tag{5}$$

Здесь G^λ — аннулятор функционала $\lambda \in H^\perp$, а $H^\lambda = H \cap G^\lambda$.

Рассмотрим симплектические листы общего положения Ω_k как поверхности в F^*, параметризованные ind F– мерным вещественным параметром k:

$$\Omega_k = \left\{a \in F^* \mid Z_l(a) = k_l,\quad l = 1,\,\ldots,\,\operatorname{ind}\,F\right\}. \tag{6}$$

Ограничение скобки Пуассона (4) на симплектический лист невырождено и определяет на нем симплектическую структуру. С учетом формул (5) нетрудно найти размерность симплектического листа Ω_k:

$$\dim\Omega_k \equiv 2d(M) = \dim F - \operatorname{ind}\,F.$$

Целое неотрицательное число $d(M)$ называется *дефектом* однородного пространства M. Алгебра инвариантных операторов $F=\left\{L_{\mu}(x,\partial_x)\right\}$ для пространств нулевого дефекта коммутативна, принадлежит центру обертывающего поля [1] и, следовательно, пространства нулевого дефекта есть коммутативные пространства.

Введем стандартным образом отображения моментов $\mu\colon T^*M\to \mathrm{G}H^{\perp}$ и $\mu\colon T^*M\to F^*$ соотношениями:

$$P_A\equiv\mu_A(x,\,p)=X_A^a(x)p_a,\;\; a_{\mu}\equiv\mu(x,\,p)=L_{\mu}(x,\,p).$$

Отображения моментов μ и μ определяют *бирасслоение*. Это означает, что количество нетривиальных функций Казимира $K_m(P)$ алгебры Ли G на $\mathrm{G}H^{\perp}$ совпадает с количеством функций Казимира $Z_m(a)$ на F^* и их можно выбрать согласованным образом:

$$Z_m\;\;\mu=K_m\;\;\mu\leftrightarrow Z_m\left(L(x,\,p)\right)=K_m\left(X(x,\,p)\right);\;\; m=1,\,...,\,\mathrm{ind}\;F\,. \tag{7}$$

Пусть $\mathrm{ind}\;F-$мерный вещественный параметр j нумерует орбиты коприсоединенного представления в $\mathrm{G}H^{\perp}$, а $\lambda(j)$ — представитель орбиты $O_{\lambda(j)}\subset \mathrm{G}H^{\perp}$. Введем на орбите $O_{\lambda(j)}$ координаты Дарбу $(\pi_{\alpha},\,q^{\alpha})$, в которых симплектическая форма Кириллова [2] имеет канонический вид: $d\pi_{\alpha}\wedge dq^{\alpha},\,\alpha=1,\,...,\,\dim O_{\lambda(j)}$. В подавляющем большинстве случаев для ковектора $\lambda\in G^*$ существует нормальная поляризация, т. е. подалгебра $\mathrm{Pol}\;\lambda\subset G^C$ такая, что

$$\dim\;\mathrm{Pol}\;\lambda=\dim G-\frac{1}{2}\dim O_{\lambda},\,\left\langle\lambda,[\mathrm{Pol}\;\lambda,\mathrm{Pol}\;\lambda]\right\rangle=0,\,\lambda+(\mathrm{Pol}\;\lambda)^{\perp}\subset O_{\lambda}.$$

В этом случае переход к каноническим координатам задается выражением [3]

$$X_A(x,\,p)=P_A(q,\,\pi,\,j)=P_A^{\alpha}(q)\pi_{\alpha}+\chi_A\left(q,\,\lambda(j)\right),\quad K_m\left(P(q,\,\pi,\,j)\right)=k_m(j). \tag{8}$$

Аналогично, перейдем к каноническим координатам $(u,\,v)$ на симплектическом листе $\Omega_{k(j)}$ с формой $dv_{\bar{\alpha}}\wedge du^{\bar{\alpha}},\;\;\bar{\alpha}=1,\,...,\,d(M)$:

$$L_{\mu}(x,\,p)=a_{\mu}(u,\,v,\,j),\quad Z_m\left(a(u,\,v,\,j)\right)=k_m(j). \tag{9}$$

Расширим симплектическое пространство $\Omega\times O_{\lambda(j)}$ с формой $d\pi\wedge dq+dv\wedge du$ до симплектического пространства K гомеоморфного пространству T^*M путем добавления $\mathrm{ind}\;F$ пар канонически сопряженных величин $(\tau,\,j)$ и определения на K симплектической формы:

$$\omega=\sum_{\alpha=1}^{\dim O_{\lambda(j)}}d\pi_{\alpha}\wedge dq^{\alpha}+\sum_{\bar{\alpha}=1}^{d(M)}dv_{\bar{\alpha}}\wedge du^{\bar{\alpha}}+\sum_{m=1}^{\mathrm{ind}\,F}dj_m\wedge d\tau^m. \tag{10}$$

Соотношения (8) и (9) неявным образом определяют переменные $(q,\,\pi,\,u,\,v,\,j)$ как функции переменных $(x,\,p)$, в частности, равенства $K_m\left(X(x,\,p)\right)=k_m(j)$ неявно определяют функции $j_m=j_m(x,\,p)$. Определим еще отображение $T\colon T^*M\to K$ соотношением

$$T^m(x,\,p)=\tau^m. \tag{11}$$

Очевидно, что отображение $\Lambda=(\mu,\,\mu,\,T)$: $T^*M\to K$ будет симплектическим, т. е. переводящим форму ω в ω тогда и только тогда, когда функции $T^m(x,\,p)$ будут удовлетворять уравнениям:

$$\left\{T^m,\,j_k\right\}=\delta_k^m,\;\;\left\{T^m,\,q^{\alpha}\right\}=\left\{T^m,\,\pi_{\alpha}\right\}=\left\{T^m,\,u^{\bar{\alpha}}\right\}=\left\{T^m,\,v_{\bar{\alpha}}\right\}=0.$$

Здесь предполагается, что переменные q, π, u, v, j являются функциями от x и p, определяемые из соотношений (8), (9).

В силу того, что формы ω и ω невырождены и размерность пространства T^*M равна размерности пространства K, то Λ, определяемое соотношениями (8), (9) и (11), является локальным симплектическим биективным отображением и осуществляет тем самым искомое каноническое преобразование.

После канонического преобразования (8), (9), (11) гамильтониан $H\big(L(x,p)\big)$ перейдет в гамильтониан $H(u,v,j)=H\big(a(u,v,j)\big)$ и уравнения (2) примут вид:

$$\frac{\mathrm{d}u^{\bar{\alpha}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H(u,v,j)}{\partial v_{\bar{\alpha}}},\quad \frac{\mathrm{d}v_{\bar{\alpha}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H(u,v,j)}{\partial u^{\bar{\alpha}}}; \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}\tau^m}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H(u,v,j)}{\partial j_m}. \tag{13}$$

Система уравнений (13) тривиально интегрируется, если известно решение системы (12). Таким образом, интегрируемость исходной гамильтоновой $G-$инвариантной системы эквивалентна интегрируемости системы (12).

Ясно, что гамильтонова система (12) есть результат редукции исходной гамильтоновой системы (2) на симплектический лист $\Omega_{k(j)}$ размерности $2d(M)$. При $d(M)=0$ (что соответствует случаю коммутативного пространства) переменных u, v нет, нет и системы (12). Гамильтонова система (12) интегрируема также и при $d(M)=1$. В этом случае, используя гамильтониан $H(q,\pi,j)$ в качестве интеграла движения, нетрудно получить решения в квадратурах. Очевидно, что при $d(M)>1$ система (12) в общем случае не интегрируема. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 1. Произвольный геодезический поток на однородном пространстве $M=\mathrm{G/H}$ с $G-$инвариантной римановой метрикой редуцируется к автономной $2d(M)-$мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируем в квадратурах тогда и только тогда, когда $d(M)<2$.

Отметим, что в работе [4] приводится критерий интегрируемости произвольных $G-$инвариантных гамильтоновых систем на T^*M в классе интегралов Нетер. В наших обозначениях этот критерий выглядит следующим образом:

$$\dim\left(G^\lambda/H^\lambda\right)+\frac{1}{2}\dim\left(G/G^\lambda\right)=\dim\left(G/H\right),$$

что является условием нулевого дефекта $d(M)=0$. Однако никакого противоречия с Теоремой 1 здесь нет, так как при $d(M)=1$ гамильтониан системы (2) не принадлежит к классу интегралов Нетер. (Напомним, что класс интегралов Нетер состоит из функций на T^*M вида $\varphi\ \mu$, $\varphi\in C^\infty(G^*)$.

2. Интегрирование уравнения Клейна — Гордона на однородных пространствах с инвариантными метриками

Простейшим квантовым обобщением геодезических потоков на однородных пространствах является волновое уравнение Клейна — Гордона. В этом случае гамильтониан геодезического потока заменяется на соответствующий оператор Лапласа — Бельтрами $\Delta=H\big(X(x,\partial_x)\big)$ и рассматривается уравнение на собственные значения вида:

$$\Delta\varphi(x)=-m^2\varphi(x). \tag{14}$$

Для интегрирования уравнения (14) осуществим процедуру *квантования* орбит коприсоединенного представления и сиплектических листов пуассоновой алгебры инвариантных функций. Пусть Q — лагранжево подмногообразие орбиты коприсоединенного представления $O_{\lambda(j)}$. Реализуем алгебру Ли G посредством дифференциальных операторов $l_A(q, \partial_q, j) = iP(q, \partial_q, j)$, которые образуют неприводимое представление алгебры G в пространстве функций на Q: $[l_A, l_B] = C_{AB}^C l_C$. Здесь q — локальные координаты на Q, а параметры j, нумерующие орбиты в $GH^{\perp}$, удовлетворяют условиям целочисленности орбит [3]. Аналогично можно построить неприводимое представление $F-$алгебры на лагранжевом подмногообразии U симплектического листа $\Omega_{k(j)} \subset F^*$ с помощью операторов $a_\mu(u, \partial_u, j)$: $[a_\mu, a_\nu] = -\Omega_{\mu\nu}(a)$.

Рассмотрим набор обобщенных функций $D_{qu}^j(x)$, определяемых системой уравнений [5]:

$$\left(X_A(x, \partial_x) + l_A(q, \partial_q, j)\right) D_{qu}^j(x) = 0, \quad \left(L_\mu(x, \partial_x) - a_\mu(u, \partial_u, j)\right) D_{qu}^j(x) = 0.$$

В настоящей работе мы не будем обсуждать смысл функций $D_{qu}^j(x)$ с точки зрения теории представлений групп и гармонического анализа на однородных пространствах, а упомянем лишь тот факт, что данный набор является полным и ортогональным на $C^\infty(M)$.

В случае $G-$инвариантной метрики $g_{ab}(x)$ оператор Лапласа — Бельтрами можно представить в виде $\Delta = \Delta(L(x, \partial_x))$. Будем искать базис уравнения (14), нумеруемый параметрами q и j, в виде:

$$\varphi_q^j(x) = \int_U \varphi_q^j(u) D_{qu}^j(x)\, d\mu(u),$$

тогда для функции $\varphi_q^j(u)$ получим следующее редуцированное уравнение:

$$\Delta\left(a(u, \partial_u, j)\right)\varphi_q^j(u) = -m^2 \varphi_q^j(u). \qquad (15)$$

Будем называть уравнение (14) интегрируемым, если нахождение его решения сводится к вычислению квадратур и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Так как ввиду приведенных построений нахождение решения (14) эквивалентно интегрированию редуцированного уравнения (15), мы приходим к следующей теореме:

Теорема 2. Волновое уравнение Клейна — Гордона (14) на однородном пространстве $M = G/H$ с инвариантной римановой метрикой редуцируется к дифференциальному уравнению с $d(M)$ независимыми переменными и, в частности, интегрируемо тогда и только тогда, когда $d(M) < 2$.

Отметим, что уравнение (15) формально можно также получить в результате квантования редуцированной гамильтоновой системы (12).

Заключение

Перечислим еще раз основные результаты, полученные в данной работе. Во–первых, построен конструктивный алгоритм интегрирования в квадратурах геодезических потоков на однородных $G-$пространствах с инвариантными римановыми структурами. Как следствие, получены необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах указанных гамильтоновых систем, обобщающие результаты работы [4]. Во–вторых, приведено обобщение данного алгоритма на случай интегрирования соответствующих волновых уравнений Клейна — Гордона на однородных пространствах с рассматриваемыми метриками.

Список литературы

1. Широков И.В. Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах // ТМФ, 2001. Т. 126, № 3. С. 393—408.
2. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978. 297 с.
3. Широков И.В. Координаты Дарбу и спектры операторов Казимира // ТМФ, 2000. Т. 123, № 3. С. 407—423.
4. Микитюк И.В. Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Мат. сборник, 1986. Т. 47, № 6. С. 514—534.
5. Bagrov V.G., Baldiotti M.C., Gitman D.M., Shirokov I.V. New solutions of relativistic wave equations in magnetic fields and longitudinal fields // Journal of Mathematical Physics, 2003. Vol. 43, № 5. P. 2284—2305.