МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.21

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Д.А. Комиссарова (1), М.М. Кипнис (2)
e–mail: dasha@math.susu.ac.ru (1), kipnis@mail.ru (2)

(1) Южно–Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

(2) Челябинский государственный педагогический университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 24 февраля 2006 г.

Исследуем устойчивость системы с запаздыванием

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}\,, \tag{1}$$

где A, B — действительные матрицы размера $m\times m$, $x_n : N \to R^m$, запаздывание $k \in N$.

В работах [1, 2] исследуется асимптотическая устойчивость аналогичного скалярного уравнения

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-k},$$

где a, b — действительные числа. В работе [1] получено необходимое и достаточное условие устойчивости этого уравнения. Из результатов работы [2] следует, что это скалярное уравнение асимптотически устойчиво, если

$$|a| + |b| < 1. \tag{2}$$

Частный случай уравнения (1), а именно, матричное уравнение

$$x_n = x_{n-1} + Bx_{n-k},$$

было исследовано в [3]. Доказано, что это уравнение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B лежат внутри области комплексной плоскости, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in C : z = 2i\,\sin\frac{\varphi}{2k-1}e^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Наша цель — получить, во–первых, достаточное условие асимптотической устойчивости уравнения (1), аналогичное условию Кона (2), во–вторых, достаточное условие устойчивости уравнения (1), если $A \simeq E$ и $A \simeq -E$, в–третьих, необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости уравнения

$$x_n = -x_{n-1} + Bx_{n-k} \tag{3}$$

в терминах ограничений на собственные значения матрицы B.

1. Устойчивость системы (1)

В дальнейших рассуждениях $\|\cdot\|$ — любая матричная норма, удовлетворяющая четырем аксиомам нормы и согласованная с векторной нормой $\|\cdot\|_*$, т. е. $\|Ax\|_* \le \|A\|\cdot\|x\|_*$, для любого $x \in R^m$ и любой матрицы A размера $m\times m$.

Теорема 1. Если для некоторой матричной нормы выполняется неравенство

$$\|A\|+\|B\|<1, \tag{4}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Пример. Рассмотрим уравнение $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}$, где

$$A=\begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, для заданных матриц, $\|A\|_1+\|B\|_1=1,4>1$, а $\|A\|_\infty+\|B\|_\infty=0,9<1$. Поэтому, согласно теореме 1, это уравнение асимптотически устойчиво при любых значениях запаздывания k. Здесь, как обычно, $\|A\|_1=\max_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$, $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|$ для любой действительной матрицы A размера $m\times m$.

Теорема 2. Уравнение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни уравнения

$$\det\left(B+Az^{k-1}-Ez^k\right)=0 \tag{5}$$

лежат внутри единичного круга. Если хотя бы один из корней лежит вне единичного круга, то уравнение (1) неустойчиво.

Пример. Рассмотрим уравнение $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-3}$, где

$$A=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ -0,1 & -0,95 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\|A\|+\|B\|>1$ для любой нормы $\|\cdot\|$, т. е. условие (4) не выполняется. Однако, вследствие теоремы 2, это уравнение асимптотически устойчиво, поскольку все корни уравнения (5) лежат внутри единичного круга. Полный список корней: $z_{1,2}=-0,599\pm0,293i$, $z_{3,4}=0,456\pm0,265i$, $z_5=-0,529$, $z_6=0,763$.

Следствие. Если $k>1$ и $|\det B|>1$, то система (1) неустойчива.

Если $A\simeq E$ и $A\simeq -E$, то систему (1) можно исследовать на устойчивость с помощью дополнительных достаточных признаков. Следующие результаты удобны для применения в случае, если $\|A-E\|\ll 1$ или $\|A+E\|\ll 1$, а $\|B\|\ll 1$.

Теорема 3. Если $\|A+B\|+(k-1)\|B\|\left(\|A-E\|+\|B\|\right)<1$, то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 4. Если $\left\|A+(-1)^{k+1}B\right\|+(k-1)\|B\|\left(\|A+E\|+\|B\|\right)<1$, то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Пример. Рассмотрим уравнение $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1,01 & -0,02 \\ 0 & 1,01 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -0,2 & 0 \\ 0,01 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что для данных матриц $\|A\|+\|B\|>1$, поэтому теорема 1 неприменима для исследования устойчивости. Однако, $\|A+B\|_1+(k-1)\|B\|_1\left(\|A-E\|_1+\|B\|_1\right)=0,83+0,0504(k-1)$. Следовательно, согласно теореме 3, это уравнение асимптотически устойчиво при $k=1, 2, 3, 4$. Дополнительные вычисления, основанные на теореме 2, показывают, что уравнение неустойчиво при $k>4$.

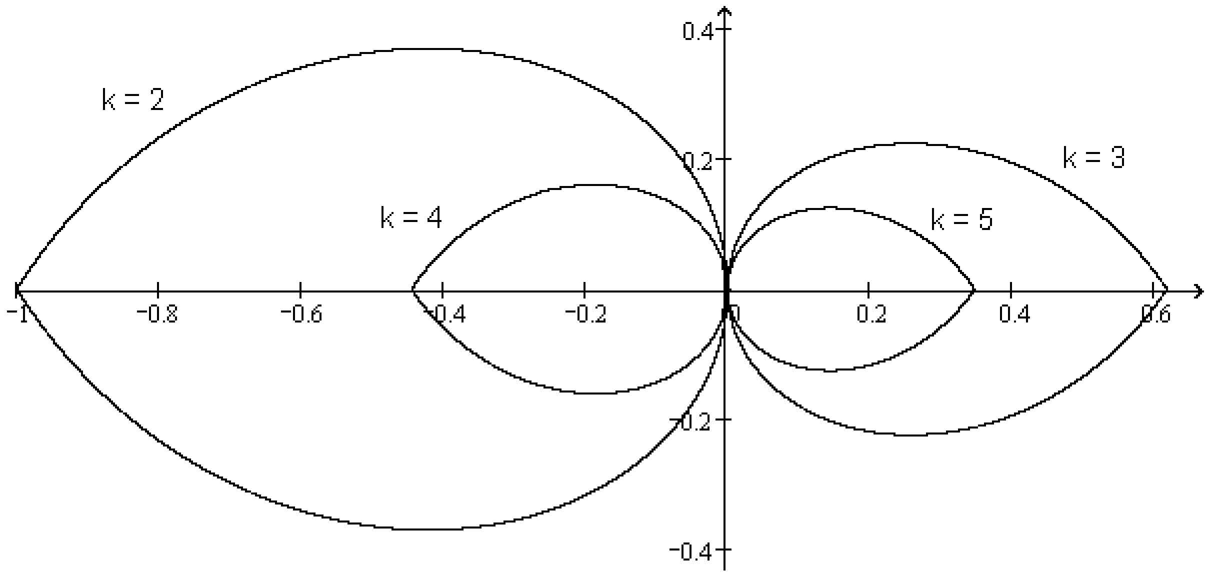
2. Овалы устойчивости для системы (3)

Теорема 5. Система (3) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B лежат внутри области комплексной плоскости, ограниченной кривой

$$\Gamma=\left\{z\in C: z=(-1)^k 2i\sin\frac{\varphi}{2k-1}e^{i\varphi},\quad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Замечание. Если k — четное, то овал устойчивости расположен в левой полуплоскости комплексной плоскости, а если k — нечетное, то — в правой полуплоскости. Таким образом, для асимптотической устойчивости системы (3) необходимо выполнение условий: $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0$ для четных значений k и $\mathrm{Re}\,\lambda_i>0$ для нечетных k. Здесь λ_i $(1\le i\le m)$ собственные значения матрицы B. Если $k=1$, то область устойчивости — единичный круг с центром в точке $0+1i$.

Некоторые овалы устойчивости для системы (3) при различных значениях запаздывания k изображены на следующем рисунке.



Пример. Рассмотрим уравнение $x_n=-x_{n-1}+Bx_{n-k}$, где $B=\begin{pmatrix}-0,1 & 1,3\\ -0,2 & 0,9\end{pmatrix}$. Собственные значения матрицы B: $\lambda_{1,2}=0,4\pm 0,1i$. Из взаимного расположения λ_1, λ_2 и овалов устойчивости (см. рис.) следует, что это уравнение асимптотически устойчиво при $k=1,3$ и неустойчиво при $k=2$ и для всех $k\ge 4$.

Возникает вопрос: можно ли сформулировать критерий устойчивости системы (1) в терминах ограничений на собственные значения матриц A и B? Как показывает следующий пример, ответ отрицательный.

Пример. Рассмотрим уравнение $x_n=Ax_{n-1}+Bx_{n-3}$, где матрица $B=\begin{pmatrix}-0,1 & 0,3\\ 0,1 & 0,2\end{pmatrix}$.

Если $A=\begin{pmatrix}0,1 & -0,6\\ -0,7 & 0,2\end{pmatrix}$, то, согласно теореме 2, данное уравнение асимптотически устойчиво,

но если $A=\begin{pmatrix}-0,2 & 0,6\\ 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$, то уравнение неустойчиво, хотя собственные значения матрицы A, и в том, и в другом случае, $\lambda_1=0,8$, $\lambda_2=-0,5$.

Заключение

Исследована проблема асимптотической устойчивости разностной системы $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}$, где A, B — действительные матрицы, а запаздывание $k \in N$. Доказано, что, если $\|A\| + \|B\| < 1$, то система асимптотически устойчива. Кроме того, система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все корни уравнения $\det\left(B + Az^{k-1} - Ez^k\right) = 0$ лежат внутри единичного круга. Получены достаточные условия устойчивости, удобные для применения, если $A \simeq E$ или $A \simeq -E$. Доказано что, в случае $A = -E$, критерием асимптотической устойчивости системы является принадлежность всех собственных значений матрицы B особому овалу устойчивости комплексной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuruklis S.A. The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$ // J. of Math. Analysis and Appl., 1994. Vol. 188. P. 719—731.
2. Cohn A. Uber die Anzahl der Wurzeln einer algebraishen Gleichung in einem Kreise // Math. Zeitschrift, 1922. Vol. 14. P. 110—148.
3. Levitskaya I.S. A note on the stability oval for $x_{n+1} = x_n + Ax_{n-k}$ // J. of Difference Equations and Appl., 2005. Vol. 11. P. 701—706.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.